Jurnal Axioma : Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 7 No 1 Januari 2022
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
72 – 78

Generalisasi Ketaksamaan Sinus pada Segitiga

Generalization of the Sine Inequality in Triangles

Nur Hidayatin[1], Frida Murtinasari[2]
hidayatin1990@gmail.com

Universitas PGRI Argopuro Jember

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan generalisasi dari ketaksamaan sinus yang berlaku pada segitiga. Generalisasi ini berupa bentuk umum dari ketaksamaan sinus pada segitiga apabila sudut-sudut yang diberikan bukan merupakan sudut-sudut segitiga, yakni ketika jumlahan ketiga sudut tersebut tidak sama dengan π. Ketaksamaan sinus yang akan dikaji terfokus pada ketaksamaan jumlahan dan perkalian sinus pada segitiga. Dalam pengerjaannya dilakukan dengan metode penelitian kualitatif berupa kaji pustaka, yaitu mengkaji ketaksamaan jumlahan dan perkalian sinus pada segitiga yang selanjutnya akan dikembangkan dan diperoleh generalisasi baru dari ketaksamaan sebelumnya, yaitu generalisasi ketaksamaan sinus pada segitiga. Generalisasi ini meliputi generalisasi ketaksamaan jumlahan sinus pada segitiga dan generalisasi ketaksamaan perkalian sinus pada segitiga. Untuk mengkajinya, terlebih dahulu perlu dipelajari konsep-konsep trigonometri, yakni definisi sinus dan cosinus, aturan-aturan sinus dan cosinus; hubungan sinus cosinus dengan sisi segitiga; hubungan jari-jari lingkaran luar segitiga dengan sisi dan sudut segitiga; serta ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri. Dari hasil penelitian didapat generalisasi ketaksamaan sinus yang berlaku pada sebarang segitiga.
Kata kunci: ketaksamaan, sinus, segitiga

Abstract

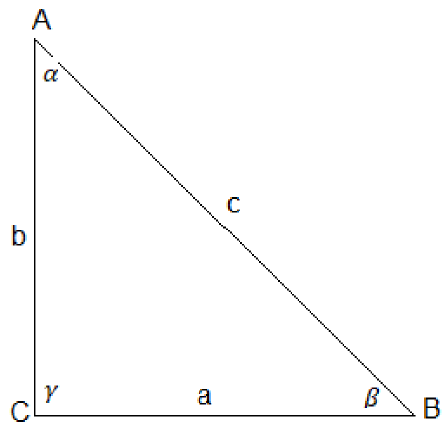
This study aims to find a generalization of the sine inequality of any triangles. This generalization is the general form of the sine inequality in a triangle when the angles given are not angles of the triangle, i.e. when the sum of the three angles is not equal to π. *The sine inequality that will be studied focuses on the inequalities of the sum and multiplication of sine in triangles. In the process, qualitative research methods are carried out in the form of literature review, namely studying the sum and the multiplication inequalities of sine in triangles which will then be developed and obtained new generalizations from the previous inequalities, namely generalizations of sine inequalities in triangles. These generalizations include generalizing the inequalities of the sum of sine in triangles and generalizing the inequalities of multiplication sine in triangles. To study this, it is necessary to first study the concepts of trigonometry, namely the definition of sine and cosine, the rules of sine and cosine; the relationship of the sine cosine to the sides of the triangle; the relationship of the radius of the circumcircle of the triangle to the sides and angles of the triangle; and arithmetic and geometric mean inequalities.The results of this study obtained the generalization of the sine inequality of any triangles.*
Keywords: *inequality, sine, triangle*

Jurnal Axioma : Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 7 No 1 Januari 2022
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
72 – 78

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang mempelajari tentang stuktur yang terorganisasikan, membahas berbagai fakta dan hubungan serta membahas ruang dan bentuk (Nur'aini et al., 2017). Salah satu cabang ilmu Matematika yang mempelajari tentang ruang dan bentuk adalah Geometri. Pengembangan Geometri selama 2021 banyak membahas tentang media belajar dan cara penyampaian ilmu Geometri, sedangkan untuk pengembangan ilmu Geometrinya hanya beberapa saja yang mengangkat dalam penelitian ilmiah. Sebelumnya peneliti pernah mengkaji pengembangan ilmu Geometri mengenai ketaksamaan cosinus pada segitiga. Sehingga dari ketaksamaan cosinus sudut-sudut segitiga kita memperoleh generalisasi ketaksamaan jumlahan cosinus dan ketaksamaan perkalian cosinus yang berlaku bagi sebarang segitiga (Hidayatin, 2021). Pada artikel ini penulis mengembangkan ketaksamaan sinus sebagai bentuk perluasan dari ketaksamaan trigonometri. Ketaksamaan sinus pada segitiga yang terdapat pada beberapa teorema akan digeneralisasi menjadi ketaksamaan jumlahan sinus dan ketaksamaan perkalian sinus pada sebarang segitiga.

Diketahui segitiga ABC siku-siku di C, dan a, b, c merupakan sisi-sisi segitiga serta α, β, γ merupakan sudut-sudut yang berhadapan dengan sisi-sisi a, b, c pada segitiga, seperti yang tampak pada gambar berikut.



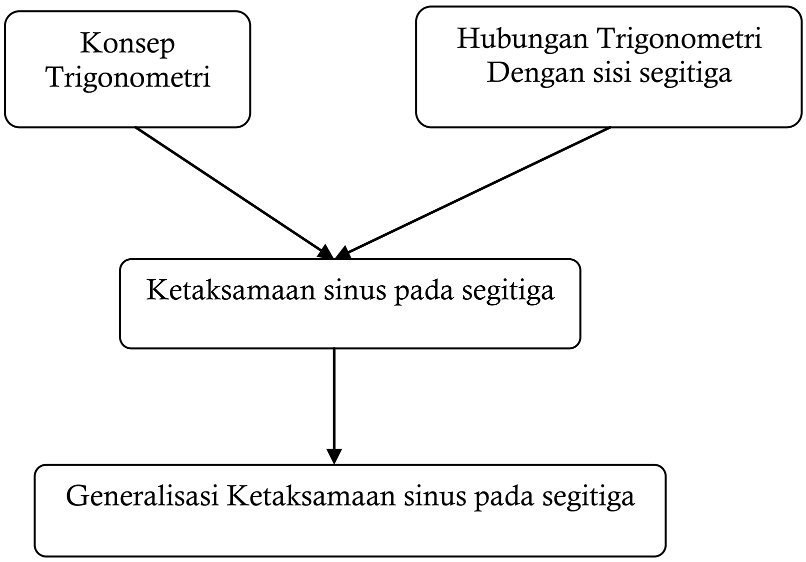
Gambar 1. Segitiga ABC dengan siku-siku di C

Berdasarkan gambar diatas, didefinisikan $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ dan $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (Janson, 2015). Pada sebarang segitiga, dapat ditemukan beberapa ketaksamaan trigonometri, yaitu ketaksamaan sinus, ketaksamaan cosinus, dan ketaksamaan tangen seperti yang telah diteliti oleh (Bottema, 1969). Dari ketaksamaan-ketaksamaan tersebut, dapat dikembangkan apabila sudut-sudut yang diberikan bukan merupakan sudut-sudut segitiga, yaitu jumlahan dari ketiga sudutnya tidak sama dengan π. Pada (Hidayatin, 2021) telah diteliti pengembangan dari ketaksamaan cosinus yang berlaku pada segitiga.

Selanjutnya akan diteliti pengembangan dari ketaksamaan sinus yang berlaku pada sebarang segitiga.

METODE

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif berupa mengkaji sebuah teori kemudian dikembangkan dan diperoleh generalisasi baru dari teori sebelumnya. Dalam hal ini diperoleh generalisasi ketaksamaan sinus pada segitiga. Untuk mendapatkan generalisasi ini, terlebih dahulu mengkaji ketaksamaan jumlahan dan perkalian sinus pada segitiga. Untuk mengkaji hal tersebut, sebelumnya perlu dipelajari konsep trigonometri, yakni definisi sinus dan cosinus, aturan-aturan sinus dan cosinus; hubungan trigonometri dengan sisi-sisi segitiga; hubungan jari-jari lingkaran luar segitiga dengan sisi dan sudut segitiga; serta ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri. Selanjutnya setelah mengkaji ketaksamaan jumlahan dan perkalian sinus pada segitiga dapat dikembangkan dengan menemukan generalisasi dari ketaksamaan jumlahan dan perkalian sinus pada segitiga tersebut.



Gambar 2. Bagan Diagram Alir Ketaksamaan Sinus Segitiga

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(Bottema, 1969)

Bukti.

Dengan memanfaatkan hubungan jari-jari lingkaran luar segitiga dengan sisi-sisi dan sudut-sudut segitiga dan aturan cosinus, didapat

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\beta+\gamma))$,

dengan a, b, c menyatakan sisi-sisi segitiga, R menyatakan jari-jari lingkaran luar segitiga dan α, β, γ menyatakan sudut-sudut segitiga.

Berdasarkan syarat awal bahwa $\pi - \alpha = \beta + \gamma$, maka diperoleh

$8R^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\beta+\gamma)) = 8R^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin^2\alpha)$(Coghetto, 2014). Selanjutnya dengan menggunakan aturan trigonometri(Gresham et al., 2019), maka diperoleh

$8R^2(\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin^2\alpha) = 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Dengan kata lain,

$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$

Selanjutnya dengan memanfaatkan ketaksamaan kuadrat jumlahan sisi-sisi segitiga (Mineno et al., 2012), diperoleh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Berdasarkan (Hidayatin, 2021) diperoleh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le 9R^2$$

Diperhatikan bahwa $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$(Gonz, 2012), maka

$$\frac{\left(2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\right)^2}{3} \le 9R^2.$$

Dengan demikian,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Selanjutnya karena $\alpha, \beta, \gamma > 0$, maka $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 0$.

Jadi,

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Berdasarkan Teorema 1, dapat diperoleh pula ketaksamaan perkalian sinus sudut segitiga dengan memanfaatkan ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri(Zou & Jiang, 2015) sebagaimana yang tertulis pada teorema berikut.

Teorema 2. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

(Bottema, 1969)

Dari teorema-teorema diatas, dapat digeneralisasikan lebih luas seperti pada teorema-teorema berikut.

Teorema 3. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

i. $\sin(2^n\alpha) + \sin(2^n\beta) + \sin(2^n\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan gasal atau $\{0\}$.

ii. $\sin(2^n\alpha) + \sin(2^n\beta) + \sin(2^n\gamma) \geq -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan genap$-\{0\}$.

Bukti. Misalkan $n = 2k - 1$, dengan n bilangan gasal pada bagian (i.) dan $n = 2k$, dengan n bilangan genap pada bagian (ii.), dengan k bilangan asli.

a. Untuk $n = 0$, diperoleh $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

b. Untuk $n = 2k - 1$, dengan k bilangan asli, pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.

   1. Misalkan $k = 1$, diperoleh
   $$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$
   2. Diasumsikan benar untuk $k = m$, bahwa
   $$\sin(2^{2m-1}\alpha) + \sin(2^{2m-1}\beta) + \sin(2^{2m-1}\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$
   3. Dibuktikan benar untuk $k = m + 1$, berlaku
   $$\sin(2^{2m+1}\alpha) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$
   Diketahui bahwa $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, maka diperoleh
   $$\sin(2^{2m+1}\alpha) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma)$$
   $$= -\sin\left(2^{2m+1}(\beta + \gamma)\right) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma)$$
   Dengan menggunakan definisi sinus dan cosinus dua sudut(Beveridge, 2014), diperoleh
   $$-\sin\left(2^{2m+1}(\beta + \gamma)\right) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma)$$
   $$= -4\sin(2^{2m}\alpha)\sin(2^{2m}\beta)\sin(2^{2m}\gamma)$$
   Selanjutnya dengan menggunakan ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri(Zou & Jiang, 2015), diperoleh
   $$-\sin\left(2^{2m+1}(\beta + \gamma)\right) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$$
   Dengan kata lain,
   $$\sin(2^{2m+1}\alpha) + \sin(2^{2m+1}\beta) + \sin(2^{2m+1}\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

c. Untuk $n = k$, dengan k bilangan asli cara pembuktian menggunakan metode yang sama pada (b)

Jurnal Axioma : Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 7 No 1 Januari 2022
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
72 – 78

Seperti halnya pada Teorema 2, dari Teorema 3 ini juga dapat dikembangkan dengan memanfaatkan ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri (Zou & Jiang, 2015)sebagaimana pada teorema berikut.

Teorema 4. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

i. $\sin(2^n\alpha)\sin(2^n\beta)\sin(2^n\gamma) \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan gasal atau $\{0\}$.

ii. $\sin(2^n\alpha)\sin(2^n\beta)\sin(2^n\gamma) \geq -\frac{3}{8}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan genap$-\{0\}$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari penelitian yang sudah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan bahwa pada sebarang segitiga, dapat diperoleh ketaksamaan sinus, meliputi ketaksamaan jumlahan sinus dan ketaksamaan perkalian sinus yang berlaku pada sebarang segitiga, yaitu sebagai berikut. Untuk setiap $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ diperoleh

1. $0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
2. $0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Dari kedua ketaksamaan diatas, apabila sudut-sudut yang diberikan bukan sudut-sudut segitiga, yaitu ketika jumlahan sudutnya tidak sama dengan π, maka diperoleh Generalisasi dari ketaksamaan sinus tersebut. Generalisasi ini meliputi Generalisasi ketaksamaan jumlahan sinus dan Generalisasi ketaksamaan perkalian sinus pada segitiga, yaitu sebagai berikut:

i. $\sin(2^n\alpha) + \sin(2^n\beta) + \sin(2^n\gamma) \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan gasal atau $\{0\}$,

ii. $\sin(2^n\alpha) + \sin(2^n\beta) + \sin(2^n\gamma) \geq -\frac{3}{2}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan genap$-\{0\}$,

iii. $\sin(2^n\alpha)\sin(2^n\beta)\sin(2^n\gamma) \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan gasal atau $\{0\}$,

i. $\sin(2^n\alpha)\sin(2^n\beta)\sin(2^n\gamma) \geq -\frac{3}{8}\sqrt{3}$, untuk setiap n bilangan genap$-\{0\}$,untuk setiap $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

DAFTAR PUSTAKA

Beveridge, R. W. (2014). *Trigonometry*. Creative Commons.

Bottema, O. (1969). *Geometric Inequalities*. Wolters Noordhoff Publishing.

Coghetto, R. (2014). Some Facts about Trigonometry, and Euclidean Geometry. *Formalized Mathematics*, *22*(4), 313–319.

Gonz, L. (2012). On the Intersections of the Incircle, and the Cevian Circumcircle of the Incenter. *Forum Geometricorum*, *12*, 141–148.

Gresham, J., Wyatt, B., & Crawford, J. (2019). Essential trigonometry without geometry. *Texas J. of Sci*, *71*(1).

Hidayatin, N. (2021). *Generalisasi Ketaksamaan Cosinus pada Sebarang Segitiga*. *5*(2), 579–588.

Janson, S. (2015). *Euclidean, spherical and hyperbolic trigonometry*. 1–53.

Mineno, K., Nakamura, Y., & Ohwada, T. (2012). Characterization of the intermediate values of the triangle inequality. *Mathematical Inequalities and Applications*, *15*(4), 1019–1035.

Nur'aini, I. L., Harahap, E., Badruzzaman, F. H., & Darmawan, D. (2017). Pembelajaran Matematika Geometri Secara Realistis Dengan GeoGebra. *Matematika*, *16*(2), 1–6.

Zou, L., & Jiang, Y. (2015). Improved arithmetic-geometric mean inequality, and its application. *Journal of Mathematical Inequalities*, *9*(1), 107–111.