**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

# Bilangan Kromatik *Graceful* Pada Keluarga Graf Grid

## *Graceful Chromatic Number on Grid Graph Family*

A. I. Kristiana[1], Anzori[2], Robiatul Adawiyah[3], Slamin[4], Ermita Rizki Albirri[5]
arika.fkip@unej.ac.id

**Universitas Jember**

**Abstrak**

Semua graf pada artikel ini merupakan graf terhubung dan graf sederhana. Misalkan $c:V(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ merupakan warna titik *proper* dengan $k\geq 2$ yang menginduksi warna sisi *proper* $c':E(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k-1\}$ sehingga $c'(uv)=|c(u)-c(v)|$, dimana *uv* pada $E(G)$ disebut pewarnaan *k-graceful*. Pewarnaan titik *c* pada graf *G* dikatakan sebagai pewarnaan *graceful* apabila *c* merupakan sebuah pewarnaan *k-gracfeul* dengan $k\in N$. Jumlah *k* minimum disebut bilangan kromatik *graceful* yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Pada artikel ini akan diuraikan langkah-langkah pewarnaan *graceful* dengan menggunakan metode pendeteksi pola guna menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik, sehingga diperoleh bilangan kromatik *graceful* keluarga graf grid yaitu pada graf $H\ (H_n)$ untuk $n\geq 2$ adalah $\chi_g(H_n)=6$ dan pada graf grid $(G_{m,n})$ untuk $m,n\geq 3$ adalah $\chi_g(G_{m,n})=\begin{cases}6 & untuk\ m=3,4\ dan\ 3\leq n\leq 5\\ 8 & untuk\ m\geq 5\ dan\ n\geq 6\end{cases}$.

**Kata kunci:** bilangan kromatik *graceful*, keluarga graf grid

***Abstract***

*All graphs in this paper be connected and simple graph. Let* $c:V(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ *is a proper vertex coloring where* $k\geq 2$ *which induces a proper edge coloring* $c':E(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k-1\}$ *define by* $c'(uv)=|c(u)-c(v)|$, *where* $uv$ *in* $E(G)$ *is called graceful k-coloring. A vertex coloring c of graph G is a graceful coloring if c is a graceful k-coloring for some* $k\in N$. *The minimum k for which a graph G is a graceful chromatic number denoted by* $\chi_g(G)$. *In this paper, we will describe the steps for graceful coloring using the pattern detection method to find coloring patterns and chromatic numbers, so that graceful chromatic numbers for the grid graph family are obtained, namely H graph* $(H_n)$ *for* $n\geq 2$ *is* $\chi_g(H_n)=6$ *and grid graph* $(G_{m,n})$ *for* $m,n\geq 3$ *is* $\chi_g(G_{m,n})=\begin{cases}6 & untuk\ m=3,4\ dan\ 3\leq n\leq 5\\ 8 & untuk\ m\geq 5\ dan\ n\geq 6\end{cases}$

***Keyword**: graceful cromatic number, grid graph family*

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

## PENDAHULUAN

Semua graf pada penelitian ini merupakan graf berhingga, sederhana dan terhubung, lihat Gross, dkk (2014). Suatu graf *G* didefinisikan sebagai pasangan $\left(V\left(G\right);E\left(G\right)\right)$, dimana $V\left(G\right)=\ \left\{v_1,v_2,v_3,...,v_n\right\}$ merupakan himpunan titik tak kosong berhingga dan $E\left(G\right)=\left\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\right\}$ merupakan himpunan sisi yang boleh kosong dan berhingga dari pasangan tak terurut *V* (Hartsfield, N. dan Ringel, G., 1994). Terdapat banyak jenis pelabelan graf, salah satunya adalah pelabelan *graceful* seperti di Gallian, J. A. (2013).

Pelabelan *graceful* pada suatu graf *G* adalah fungsi injektif $c:V\left(G\right)\rightarrow\left\{0,1,2,...,\left|E\left(G\right)\right|\right\}$ yang dipetakan ke setiap sisi $uv\in E\left(G\right)$ dengan bobot $c'\left(uv\right)=\left|c\left(u\right)-c\left(v\right)\right|$, sedemikian sehingga semua bobot sisinya berbeda. Oleh karena itu, jika $f$ adalah pelabelan *graceful* dari graf *G*, maka himpunan bobot sisi dari graf *G* adalah $\left\{1,2,...,m\right\}$. Suatu graf yang memiliki pelabelan *graceful* merupakan graf *graceful* di Byers, A. D.(2018).

Terdapat tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik dari sebuah graf *G* adalah pemberian warna pada titik dimana tidak ada dua titik yang berbagi sisi memiliki warna yang sama (Joyner, dkk 2013). Pewarnaan sisi dari sebuah graf *G* adalah pemberian warna pada sisi dimana sisi yang bertetangga (sisi yang bersisian pada titik yang sama) memiliki warna yang berbeda (Hartsfield, N. dan Ringel, G., 1994). Menurut Chartrand dan Lesniak (1996) bahwa jika terdapat minimal *k* warna pada pewarnaan wilayah maka disebut *k*-pewarnaan wilayah. Terdapat beberapa hasil tentang topik pewarnaan di Agustin, dkk (2018), Azahra, dkk (2020), dan Kristiana, dkk (2020).

Pewarnaan *k-graceful* adalah pewarnaan titik *proper* $c:V\left(G\right)\rightarrow\left\{1,2,...,k\right\}$, dimana $k\geq 2$ yang menginduksi pewarnaan sisi *proper* $c':E\left(G\right)\rightarrow\left\{1,2,...,k-1\right\}$ didefinisikan $c'\left(uv\right)=\left|c\left(u\right)-c\left(v\right)\right|$. Pewarnaan titik *c* dari sebuah graf *G* merupakan pewarnaan *graceful* jika *c* termasuk pewarnaan *k-graceful* untuk $k\in N$. Menurut Zhang, P (2016) jumlah minimum *k* untuk pewarnaan *k-graceful* pada graf *G* disebut bilangan kromatik *graceful* dari graf *G* yang dinotasikan dengan $\chi_g\left(G\right)$.

Beberapa peneliti yang telah melakukan penelitian tentang pewarnaan *graceful* adalah English dan Zhang (2017) tentang bilangan kromatik *graceful* pada graf pohon. Selanjutnya Alfarisi, dkk (2019) menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *tadpole*, graf *pan*, dan graf *sun*. Selanjutnya Mincu, dkk (2019) tentang bilangan kromatik *graceful* pada beberapa kelas graf khusus. Selanjutnya Sania, dkk (2020) yang

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, dan graf *flowerpot*. Selanjutnya Khoirunnisa, dkk (2021) menemukan bilangan kromatik *graceful* pada hasil operasi *comb* graf roda, yaitu graf roda dengan graf lintasan dan graf roda dengan graf lingkaran.

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, penelitian ini tertarik untuk menganalisis bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid. Pemilihan pewarnaan *graceful* didasari oleh keunikannya, yaitu pada suatu graf $G$ titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda yang menginduksi pewarnaan sisinya dimana warna sisinya diperoleh dari nilai mutlak selisih titik yang bertetangga dengan sisi tersebut. Sementara itu, pemilihan keluarga graf grid didasari oleh proses generalisasi yaitu menjadikan topik pewarnaan *graceful* semakin umum melalui penelitian terkait bilangan kromatik *graceful* keluarga graf grid yang belum pernah diteliti atau didapatkan sebelumnya.

**Definisi** Pewarnaan *k-graceful* dari sebuah graf tak kosong $G$ adalah pewarnaan titik *proper* $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$, dimana $k \geq 2$ yang menginduksi pewarnaan sisi *proper* $c': E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k-1\}$ didefinisikan $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$. (Zhang, 2016)

**Observasi** Jika $H$ adalah subgraf dari graf $(G)$, maka $\chi_g(G) \geq \chi_g(H)$. (Byers, A. D., 2018). Pada artikel ini akan dicari bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid, yaitu graf $H$ $(H_n)$ dengan $n \geq 2$ dan graf grid $(G_{m,n})$ dengan $m, n \geq 3$.

## METODE

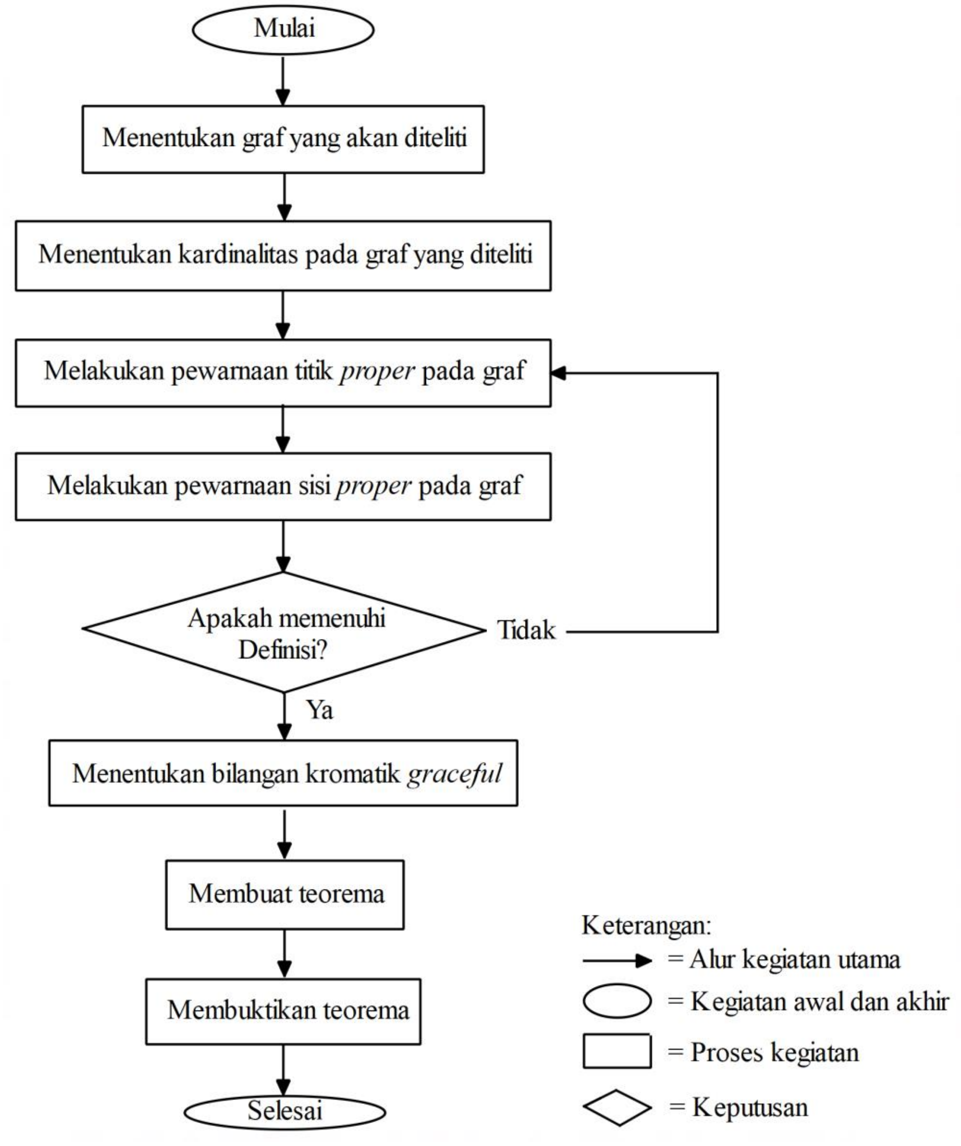
Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif merupakan jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui, sehingga hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian eksploratif dikarenakan tujuan dari penelitian ini ialah agar suatu topik yang diangkat dapat dikenal oleh masyarakat luas, memberikan gambaran dasar dari topik yang diteliti, mengembangkan gagasan dan teori yang bersifat dapat diubah, membuka kemungkinan adanya penelitian lanjutan mengenai topik bahasan, dan menentukan arah maupun teknik penelitian yang akan digunakan dalam penelitian selanjutnya.

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola (*pattern recognition*). Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada yang dapat diterapkan

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

dalam pewarnaan *graceful* pada keluarga graf grid. Metode pendeteksi pola (*pattern recognition*) merupakan metode untuk mencari serta menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik, sehingga diperoleh bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid.

Selanjutnya, prosedur penelitian yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid disajikan sebagai berikut,




Gambar 1. Alur Penelitian

Penjelasan dari prosedur penelitian untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid adalah sebagai berikut:

1. Menentukan graf yang diteliti, yaitu keluarga graf grid meliputi graf $H$ dan graf grid.
2. Menentukan kardinalitas graf $H$;
3. Melakukan pewarnaan titik *proper* pada graf $H$;
4. Melakukan pewarnaan sisi *proper* pada graf $H$;

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

5. Mengecek pewarnaan yang telah dilakukan, apakah sudah memenuhi Definisi, apabila belum memenuhi maka melakukan pewarnaan *proper* pada titik dan sisi kembali, apabila sudah memenuhi maka lanjut ke langkah selanjutnya;
6. Menentukan bilangan kromatik *graceful* pada graf *H*;
7. Membuat teorema hasil pewarnaan *graceful* pada graf *H*;
8. Membuktikan kebenaran dari teorema yang telah diperoleh pada graf *H*;
9. Mengulangi langkah 2 sampai 8 untuk mewarnai keluarga graf grid.
10. Selesai.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini merupakan penelitian pewarnaan *graceful* pada keluarga graf grid, yaitu graf $H$ $(H_n)$ dan graf grid $(G_{m,n})$. Hasil dari penelitian ini berupa teorema baru bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid sebagai berikut.

**Teorema 1.** Bilangan kromatik *graceful* pada graf $H$ $(H_n)$ untuk $n \geq 2$ adalah $\chi_g(H_n) = 6$.

**Bukti.** Graf $H$ $(H_n)$ memiliki $V(H_n) = \{u_i, v_i, w_i; 1 \leq i \leq 2n\}$ dan $E(H_n) =$
$\{u_iu_{i+1}, v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{w_iw_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n, \text{untuk } i \text{ ganjil}\} \cup \{u_iw_i, v_iw_i; 1 \leq i \leq 2n\}$.
Kardinalitas titik dari graf $H$ adalah $|V(H_n)| = 6n$ dan kardinalitas sisi dari graf $H$ adalah $|E(H_n)| = 9n-2$. Untuk membuktikan bilangan kromatik *graceful* pada graf $H$ $(H_n)$ adalah 6, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(H_n) \geq 6$ dan batas atas $\chi_g(H_n) \leq 6$. Pertama, kita akan menunjukkan $\chi_g(H_n) \geq 6$. Andaikan $\chi_g(H_n) < 6$, misalnya $\chi_g(H_n) = 5$. Misalkan $u_1$ diwarnai dengan 1, $u_2$ diwarnai dengan 3, dan $w_2$ diwarnai dengan 4. Maka, pewarnaan sisinya sebagai berikut.

$$c'(u_1u_2) = |c(u_1) - c(u_2)| = |1-3| = 2$$
$$c'(u_2w_2) = |c(u_2) - c(w_2)| = |3-4| = 1$$

Kemudian akan ditentukan warna dari $c(u_3)$. Karena $u_2u_3 \in E(H_n)$, sehingga $c(u_3) \neq 3$.

a. Jika $c(u_3) = 1$, maka $c'(u_2u_3) = |c(u_2) - c(u_3)| = |3-1| = 2$. Karena $u_2u_3$ bertetangga dengan $u_1u_2$ dan $u_2u_3 = u_1u_2 = 2$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

b. Jika $c(u_3)=2$, maka $c'(u_2u_3)=|c(u_2)-c(u_3)|=|3-2|=1$. Karena $u_2u_3$ bertetangga dengan $u_2w_2$ dan $u_2u_3=u_2w_2=1$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.

c. Jika $c(u_3)=4$, maka $c'(u_2u_3)=|c(u_2)-c(u_3)|=|3-4|=1$. Karena $u_2u_3$ bertetangga dengan $u_2w_2$ dan $u_2u_3=u_2w_2=1$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.

d. Jika $c(u_3)=5$, maka $c'(u_2u_3)=|c(u_2)-c(u_3)|=|3-5|=2$. Karena $u_2u_3$ bertetangga dengan $u_1u_2$ dan $u_2u_3=u_1u_2=2$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.

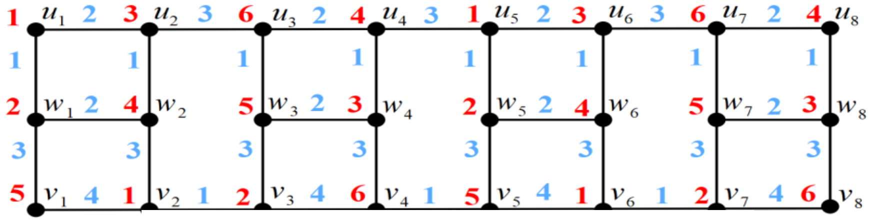
Kemungkinan a, b, c, dan d kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*, yaitu setiap sisi yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Oleh karena itu, didapatkan kesimpulan bahwa $\chi_g(H_n)\geq 6$ untuk $n\geq 2$. Selanjutnya, kita akan menunjukkan $\chi_g(H_n)\leq 6$. Pewarnaan titik *proper* yang didefinisikan $c:V(H_n)\rightarrow\{1,2,3,4,5,6\}$ sebagai berikut.

$$c(x)=\begin{cases} 1, & \text{untuk } x\in\{u_i, i\equiv 1(\bmod 4)\} \text{ dan } \{v_i, i\equiv 2(\bmod 4)\} \\ 2, & \text{untuk } x\in\{v_i, i\equiv 3(\bmod 4)\} \text{ dan } \{w_i, i\equiv 1(\bmod 4)\} \\ 3, & \text{untuk } x\in\{u_i, i\equiv 2(\bmod 4)\} \text{ dan } \{w_i, i\equiv 0(\bmod 4)\} \\ 4, & \text{untuk } x\in\{u_i, i\equiv 0(\bmod 4)\} \text{ dan } \{w_i, i\equiv 2(\bmod 4)\} \\ 5, & \text{untuk } x\in\{v_i, i\equiv 1(\bmod 4)\} \text{ dan } \{w_i, i\equiv 3(\bmod 4)\} \\ 6, & \text{untuk } x\in\{u_i, i\equiv 3(\bmod 4)\} \text{ dan } \{v_i, i\equiv 0(\bmod 4)\} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi $c$ di atas, dapat dilihat bahwa fungsi $c$ ini juga menginduksi pewarnaan sisi *proper* yang didefinisikan $c':E(H_n)\rightarrow\{1,2,3,4\}$.

$$c'(y)=\begin{cases} 1, & \text{untuk } y\in\{v_iv_{i+1}, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{u_iw_i\} \\ 2, & \text{untuk } y\in\{u_iu_{i+1}, i \text{ ganjil}\} \text{ dan } \{w_iw_{i+1}, i \text{ ganjil}\} \\ 3, & \text{untuk } y\in\{u_iu_{i+1}, i \text{ genap}\} \text{ dan } \{v_iw_i\} \\ 4, & \text{untuk } y\in\{v_iv_{i+1}, i \text{ ganjil}\} \end{cases}$$

Pada graf $H$ $(H_n)$ untuk $n\geq 2$ diperoleh batas bawah dan batas atasnya adalah $\chi_g(H_n)\geq 6$ dan $\chi_g(H_n)\leq 6$. Oleh karena itu, $\chi_g(H_n)=6$ untuk $n\geq 2$. Berikut ilustrasi pewarnaan *graceful* pada graf $H$ $(H_n)$




**Gambar 2. Pewarnaan *Graceful* pada Graf H (*H₄*)**

$(H_4)$

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

**Teorema 2.** Bilangan kromatik *graceful* pada graf grid $\left(G_{m,n}\right)$ untuk $m, n \geq 3$ adalah $\chi_g\left(G_{m,n}\right)=\begin{cases}6 & untuk\ m=3,4\ dan\ 3\leq n\leq 5\\ 8 & untuk\ m\geq 5\ dan\ n\geq 6\end{cases}$

**Bukti.** Graf grid $\left(G_{m,n}\right)$ memiliki $V\left(G_{m,n}\right)=\left\{v_{i,j};1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\right\}$ dan $E\left(G_{m,n}\right)=\left\{v_{i,j}v_{i+1,j};1\leq i\leq m-1\right\}\cup\left\{v_{i,j}v_{i,j+1};1\leq j\leq n-1\right\}$. Kardinalitas titik dari graf grid adalah $\left|V\left(G_{m,n}\right)\right|=mn$ dan kardinalitas dari graf grid adalah $\left|E\left(G_{m,n}\right)\right|=2mn-m-n$. Pembuktian bilangan kromatik *graceful* pada graf grid $\left(G_{m,n}\right)$ dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

**Kasus 1:** $\chi_g\left(G_{m,n}\right)=6$**,** untuk $m=3,4$ dan $3\leq n\leq 5$.

Graf $H$ $\left(H_n\right)$ merupakan subgraf dari graf grid $\left(G_{m,n}\right)$. Berdasarkan Teorema 1 dan Observasi diperoleh $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\geq\chi_g\left(H_n\right)=6$. Kita akan menunjukkan $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\leq 6$. Pewarnaan titik *proper* didefinisikan $c:V\left(G_{m,n}\right)\rightarrow\{1,2,3,4,5,6\}$ sebagai berikut:

$$c(x)=\begin{cases}1, & \text{untuk } x\in\{v_{11},v_{14},v_{33}\}\\ 2, & \text{untuk } x\in\{v_{23},v_{35},v_{42}\}\\ 3, & \text{untuk } x\in\{v_{12},v_{25},v_{31},v_{44}\}\\ 4, & \text{untuk } x\in\{v_{13},v_{21},v_{43}\}\\ 5, & \text{untuk } x\in\{v_{24},v_{32},v_{45}\}\\ 6, & \text{untuk } x\in\{v_{15},v_{22},v_{34},v_{41}\}\end{cases}$$

Berdasarkan fungsi $c$ di atas, dapat dilihat bahwa fungsi $c$ ini menginduksi pewarnaan sisi *proper* yang didefinisikan $c':E\left(G_{m,n}\right)\rightarrow\{1,2,3,4,5\}$.

$$c'(y)=\begin{cases}1, & \text{untuk } y\in\{v_{12}v_{13},v_{21}v_{31},v_{22}v_{32},v_{23}v_{33},v_{24}v_{34},v_{25}v_{35},v_{43}v_{44}\}\\ 2, & \text{untuk } y\in\{v_{11}v_{12},v_{13}v_{23},v_{21}v_{22},v_{24}v_{25},v_{31}v_{32},v_{42}v_{43},v_{44}v_{45}\}\\ 3, & \text{untuk } y\in\{v_{13}v_{14},v_{11}v_{21},v_{12}v_{22},v_{15}v_{25},v_{23}v_{24},v_{31}v_{41},v_{32}v_{42},v_{33}v_{43},\\ & v_{34}v_{44},v_{35}v_{45}\}\\ 4, & \text{untuk } y\in\{v_{14}v_{24},v_{22}v_{23},v_{32}v_{33},v_{34}v_{35},v_{41}v_{42}\}\\ 5, & \text{untuk } y\in\{v_{14}v_{15},v_{33}v_{34}\}\end{cases}$$

Pada graf grid $\left(G_{m,n}\right)$ dengan $m=3,4$ dan $3\leq n\leq 5$ diperoleh batas bawah dan batas atasnya adalah $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\geq 6$ dan $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\leq 6$. Oleh karena itu, $\chi_g\left(G_{m,n}\right)=6$ untuk $m=3,4$ dan $3\leq n\leq 5$.

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

**Kasus 2:** $\chi_g\left(G_{m,n}\right)=8$, untuk $m\geq 5$ dan $n\geq 6$.

Untuk membuktikan bilangan kromatik *graceful* pada graf grid $\left(G_{m,n}\right)$ adalah 8, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\geq 8$ dan batas atas $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\leq 8$. Pertama, kita akan menunjukkan $\chi_g\left(G_{m,n}\right)\geq 8$. Andaikan $\chi_g\left(G_{m,n}\right)<8$, misalnya $\chi_g\left(G_{m,n}\right)=7$. Misalkan $v_{32}$ diwarnai dengan 3, $v_{41}$ diwarnai dengan 7, $v_{42}$ diwarnai dengan 4, dan $v_{52}$ diwarnai dengan 2. Maka diperoleh pewarnaan sisinya sebagai berikut.

$c'\left(v_{32}v_{42}\right)=\left|c\left(v_{32}\right)-c\left(v_{42}\right)\right|=|3-4|=1$
$c'\left(v_{41}v_{42}\right)=\left|c\left(v_{41}\right)-c\left(v_{42}\right)\right|=|7-4|=3$
$c'\left(v_{42}v_{52}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{52}\right)\right|=|4-2|=2$

Setelah itu akan ditentukan warna dari $c\left(v_{43}\right)$. Warna $c\left(v_{42}\right)=4$ dan $v_{42}v_{43}\in E\left(G_{m,n}\right)$, sehingga $c\left(v_{42}\right)\neq 4$.

a. Jika $c\left(v_{43}\right)=1$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-1|=3$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga dengan $v_{41}v_{42}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{41}v_{42}=3$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.
b. Jika $c\left(v_{43}\right)=2$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-2|=2$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga $v_{42}v_{52}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{42}v_{52}=2$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.
c. Jika $c\left(v_{43}\right)=3$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-3|=1$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga dengan $v_{32}v_{42}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{32}v_{42}=1$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.
d. Jika $c\left(v_{43}\right)=5$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-5|=1$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga dengan $v_{32}v_{42}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{32}v_{42}=1$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.
e. Jika $c\left(v_{43}\right)=6$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-6|=2$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga $v_{42}v_{52}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{42}v_{52}=2$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.
f. Jika $c\left(v_{43}\right)=7$, maka $c'\left(v_{42}v_{43}\right)=\left|c\left(v_{42}\right)-c\left(v_{43}\right)\right|=|4-7|=3$. Karena $v_{42}v_{43}$ bertetangga $v_{41}v_{42}$ dan $v_{42}v_{43}=v_{41}v_{42}=3$, maka kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*.

Kemungkinan a, b, c, d, e, dan f kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful*, yaitu setiap sisi yang bertetangga harus memiliki warna

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

yang berbeda. Oleh karena itu, didapatkan kesimpulan bahwa untuk $\chi_g\left(G_{m,n}\right) \geq 8$, untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 6$.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan $\chi_g\left(G_{m,n}\right) \leq 8$. Pewarnaan titik *proper* yang didefinisikan $c: V\left(G_{m,n}\right) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ sebagai berikut:

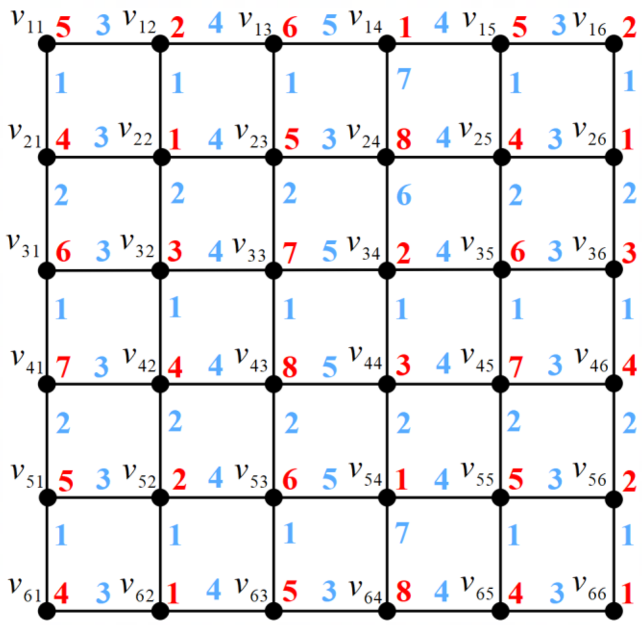
$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \in \{v_{i,2}, i \equiv 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,4}, i \equiv 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{1,j}, j \equiv \\ & 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{2,j}, j \equiv 2 \pmod 4\} \\ 2, & \text{untuk } x \in \{v_{i,2}, i \equiv 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,4}, i \equiv 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{1,j}, j \equiv \\ & 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{3,j}, j \equiv 0 \pmod 4\} \\ 3, & \text{untuk } x \in \{v_{i,2}, i \equiv 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,4}, i \equiv 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{3,j}, j \equiv \\ & 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{4,j}, j \equiv 0 \pmod 4\} \\ 4, & \text{untuk } x \in \{v_{i,1}, i \equiv 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,2}, i \equiv 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{2,j}, j \equiv \\ & 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{4,j}, j \equiv 2 \pmod 4\} \\ 5, & \text{untuk } x \in \{v_{i,1}, i \equiv 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,3}, i \equiv 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{1,j}, j \equiv \\ & 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{2,j}, j \equiv 3 \pmod 4\} \\ 6, & \text{untuk } x \in \{v_{i,1}, i \equiv 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,3}, i \equiv 1 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{1,j}, j \equiv \\ & 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{3,j}, j \equiv 1 \pmod 4\} \\ 7, & \text{untuk } x \in \{v_{i,1}, i \equiv 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,3}, i \equiv 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{3,j}, j \equiv \\ & 3 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{4,j}, j \equiv 1 \pmod 4\} \\ 8, & \text{untuk } x \in \{v_{i,3}, i \equiv 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{i,4}, i \equiv 2 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{2,j}, j \equiv \\ & 0 \pmod 4\} \text{ dan } \{v_{4,j}, j \equiv 3 \pmod 4\} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi $c$ di atas, dapat dilihat bahwa fungsi $c$ ini juga menginduksi pewarnaan sisi *proper* yaitu $c': E\left(G_{m,n}\right) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$$c'(y) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 1 \pmod 4 \text{ dan } j \neq j \equiv 0 \pmod 4\} \\ & \text{dan } \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 3 \pmod 4 \text{ dan } 1 \leq j \leq m\} \\ 2, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 2 \pmod 4 \text{ dan } j \neq j \equiv 0 \pmod 4\} \\ & \text{dan } \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 0 \pmod 4 \text{ dan } 1 \leq j \leq m\} \\ 3, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n \text{ dan } j \equiv 1 \pmod 4\} \text{ dan} \\ 4, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 < j \leq m, j \text{ genap}\} \\ 5, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i,j+1}, i \neq i \equiv 2 \pmod 4 \text{ dan } j \equiv 3 \pmod 4\} \\ 6, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 2 \pmod 4 \text{ dan } j \equiv 0 \pmod 4\} \\ 7, & \text{untuk } y \in \{v_{i,j}v_{i+1,j}, i \equiv 1 \pmod 4 \text{ dan } j \equiv 0 \pmod 4\} \end{cases}$$

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

Pada graf grid $(G_{m,n})$ dengan $m \geq 5$ dan $n \geq 6$ diperoleh batas bawah dan batas atasnya adalah $\chi_g(G_{m,n}) \geq 8$ dan $\chi_g(G_{m,n}) \leq 8$. Oleh karena itu, $\chi_g(G_{m,n}) = 8$, untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 6$. Berikut gambar ilustrasi pewarnaan *graceful* pada graf grid $(G_{m,n})$



**Gambar 3 Pewarnaan *Graceful* pada Graf Grid** $(G_{6,6})$

## KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa dalam penelitian ini bilangan kromatik *graceful* diperoleh dengan melakukan pewarnaan titik *proper* yang menginduksi pewarnaan sisi *proper* pada keluarga graf grid yang meliputi graf *H* dan graf grid. Jadi, warna sisi pada pewarnaan *graceful* diperoleh dari hasil induksi atau selisih nilai mutlak titik yang bertetangga pada sisi tersebut. Kemudian, penelitian ini juga menemukan dua teorema baru mengenai pewarnaan *graceful* pada keluarga graf grid. Bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf grid yang didapatkan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *H* $(H_n)$ untuk $n \geq 2$ adalah $\chi_g(H_n) = 6$.
2. Bilangan kromatik *graceful* pada graf grid $(G_{m,n})$ untuk $m, n \geq 3$ adalah
$$\chi_g(G_{m,n}) = \begin{cases} 6 & untuk\ m = 3, 4\ dan\ 3 \leq n \leq 5 \\ 8 & untuk\ m \geq 5\ dan\ n \geq 6 \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penelitian, terdapat beberapa graf yang masih belum ditemukan nilai dari bilangan kromatik *graceful*-nya dan sulit untuk

**Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran**
**Volume 8 No 2 Juli 2023**
**E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149**
**144 – 155**

menemukan generalisasi rumusnya. Oleh karena itu, terdapat beberapa masalah terbuka yang dapat digunakan sebagai acuan penelitian selanjutnya sebagai berikut:

**Masalah terbuka 1** *Bagaimana bilangan kromatik graceful untuk keluarga graf lain, seperti keluarga graf pohon, keluarga graf buku, dll.*

**Masalah terbuka 2** *Bagaimana bilangan kromatik graceful untuk operasi seperti operasi comb, operasi corona, dll.*

## DAFTAR PUSTAKA

Agustin, d. (2018). Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs. *Journal pf Physics: Conf. Series* , 1008 012038.

Alfarisi, dkk. (2019). Graceful Chromatic Number of Unicyclic Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, *1306*(1).

Azahra, N. (2020). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Pada Keluarga Graf Grid dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Skripsi.* Jember: Universitas Jember.

Balakrishnan, R., dan Ranganathan, K. (2012). *A Textbook of Graph Theory* (Second Edition). Springer.

Byers, A. D. (2018). Graceful Colorings and Connection in Graphs. *Disertasi.* Kalamazoo: Western Michigan University.

Chartrand, G dan L. Lesniak. (1996). *Graphs and Digraphs Third Edition.* United States America: Chapman and Hall.

English, S., dan Zhang, P. (2017). On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica*, *142*(1), 57–73.

Exoo, dkk. (2006). Totally magic graphs. *Discrete Mathematics*, *254*(1–3), 103–113.

Gallian, J. A. (2013). Graph Labelling. *Electronic Journal of Combinatorics*, (Dynamic Survey DS6).

Gross, d. (2014). *Handbook of Graph Theory Second Edition.* United State: CRC Press.

Hartsfield, N., dan Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom: Academic Press Limited.

Irawati, N., dan Heri, R. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Complete Graph. *Matematika*, *13*(3), 136–142.

Jeyanthi, dkk. (2015). One Modulo Three Mean Labeling of Cycle Related Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *103*(4), 625–633.

Joyner, dkk. (2013). *Algorithmic Graph Theory*. Free Software Foundation.

Khoirunnisa, dkk. (2021). On graceful chromatic number of comb product of ladder graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *1836*(1).

Kristiana, dkk. (2019). Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs.

*International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)*, *10*(03), 1606–1616.

Levin, O. (2019). *Discreate Mathematics (3RD Edition)*.

M.I., M., dan E.M., B. (2016). Ladder and Subdivision of Ladder Graphs with Pendant Edges are Odd Graceful. *International Journal on Applications of Graph Theory In Wireless Ad Hoc Networks And Sensor Networks*, *8*(1), 1–8.

Mincu, dkk. (2019). The Graceful Chromatic Number for Some Particular Classes of Graphs. *Proceedings - 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2019*, *April*, 109–115.

Sania, dkk. (2020). Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Unicyclic. *CGANT Journal of Mathematics And Applications*, *1*(2), 27–38.

Sudha, S., dan Manikandan, K. (2015). General Pattern of Total Coloring of a Prism Graph of-Layers and a Grid Graph. *International Journal of Innovative Science and Modern Engineering (IJISME)*, *3*, 2319–6386.

Wibisono, S. (2008). *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Windartini, T. (2015). Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda. *Skripsi.* Jember: Universitas Jember.

Zhang, P. (2016). A Kaleidoscopic View of Graph Colorings. In *SpringerBriefs in Mathematics*. Switzerland: Springer International Publishing.