Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Pensil

On the Local Irregularity Vertex Coloring of Pencil Graphs

Guntari Saputra[1], Arika Indah Kristiana[2], Robiatul Adawiyah[3], Arif Pujiyanto[4], Laela Nur 'Aini[5], Israul Laila[6], Rahma Dila[7]

guntarisaputra594@gmail.com

[1,2,3,4,5]**Universitas Jember,** [6,7]**Universitas Malikussaleh**

Abstrak

Graf yang digunakan dalam penelitian ini merupakan graf sederhana dan terhubung yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Sebuah fungsi $l: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$ disebut pelabelan ketakteraturan titik dan $w: V(G) \to N$. Jika untuk setiap $uv \in E(G)$, $w(u) \neq w(v)$ dimana $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ dan $opt(l) = \min\{maks\{l_i\}; l_i, \, pelabelan\ ketakteraturan\ titik\}$ maka f disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf G dinotasikan dengan $\chi_{lis}(G)$ yaitu kardinalitas minimum label terbesar dari seluruh pewarnaan titik ketakteraturan lokal tersebut. Dalam atikel ini kita akan belajar tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf pensil serta menemukan nilai eksak dari bilangan kromatiknya.

Kata kunci: ketakteraturan lokal; pewarnaan titik; graf pensil.

Abstract

The graph used in this paper is a simple and connected graph consisting of a set of vertices $V(G)$ and a set of edge $E(G)$. A function $l: V(G) \to \{1,2,3,\dots,k\}$ is called vertex irregulaarity labelling and $w: V(G) \to N$. If for every $uv \in E(G)$, $w(u) \neq w(v)$ where $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ and $opt(l) = min\{maks\{l_i\}; l_i, \, vertex\ irregulaarity\ labelling\}$ then, f is called local irregularity vertex coloring. The chromatic number of the local irregular vertex coloring of graph G is denoted by $\chi_{lis}(G)$, which is the minimum cardinality of the largest label of all local irregular vertex coloring. In this article we will learn about coloring points of local irregularities in pencil graphs and finding the exact value of the chromatic number.

Keywords: *local irregularity; vertex coloring; pencil graphs*

PENDAHULUAN

Graf merupakan ilmu terapan dari ilmu matematika. Teori Graf pertama kali muncul oleh matematikawan asal Swiss yaitu Leonhard Euler dalam menyelesaikan permasalahan Jembatan Konigsberg. Daniel dan Taneo (Azahra, 2020) menyebutkan bahwa graf digunakan untuk menggambarkan objek-objek diskrit dan keterkaitannya antar objek-objek tersebut. Graf G adalah suatu himpunan yang terdiri dari humpunan $V(G)$ dan $E(G)$, dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang disebut titik sedangkan sedangkan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut u, v yang boleh kosong yang disebut sisi. Berdasarkan definisi diatas dapat disimpulkan bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi dan hanya mempunyai satu titik (Agustin, 2021). Pewarnaan graf merupakan salah satu kasus dari pelabelan graf, yang dilakukan dengan cara memberikan warna pada titik-titik yang ada pada batas tertentu (Adawiyah, 2021). Warna yang digunakan pada pewarnaan graf berupa himpunan bilangan bulat positif, seperti $\{1,2, \ldots k\}$. Pada pewarnaan graf terdapat istilah bilangan kromatik $\chi(G)$. Apabila terdapat sebuah graf G yang memiliki k warna, maka bilangan kromatik yang dimaksud merupakan bilangan k atau jumlah warna minimum/terkecil pada graf G sedemikian hingga dua titik/sisi/wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Chatrand, 2020).

Pewarnaan graf terdiri tiga jenis yaitu pewarnaan titik, pewarnan sisi dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik pada graf adalah memberikan warna berbeda pada titik yang saling bertetangga (Daniel, 2019; Ramane, 2020). Pewarnaan titik dilakukan dengan memberikan warna pada tiap titik sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik disebut sebagai bilangan kromatik dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Dalam pewarnaan graf, khususnya pewarnaan titik, terdapat beberapa pengembangan dengan menambahkan syarat tertentu, misalnya pewarnaan lokasi. Konsep pewarnaan lokasi suatu graf mengaitkan konsep pewarnaan titik dan dimensi partisi (Hartsfield, 1990). Pewarnaan sisi dari sebuah graf G adalah pemberian warna pada sisi dimana sisi yang bertetangga (sisi yang bersisian pada titik yang sama) memiliki warna yang berbeda (Hartsfield, N. dan Ringel, G., 1994). Menurut Chaltrand dan Lesniak (1996) bahwa jika terdapat minimal k warna pada pewarnaan wilayah maka disebut k-pewarnaan wilayah (Munawaroh, 2022). Pewarnaan titik di G merupakan pewarnaan lokasi jika kode warna titik-titik di G berbeda (Waluyo, 2023). Pewarnaan lokasi pada suatu graf tidak hanya bertujuan mencari apakah suatu graf dikatakan memenuhi definisi pewarnaan lokasi saja, tetapi juga untuk mendapatkan warna minimum (banyaknya warna) pada pewarnaan lokasi tersebut yang selanjutnya dinamakan bilangan kromatik lokasi (Kritiana, 2023). Jadi bilangan kromatik adalah bilangan k terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan $1, 2, 3, \ldots, k$. Pelabelan pada graf G didefinisikan sebagai fungsi $l: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Fungsi l disebut pelabelan titik. Selanjutnya pada penelitian ini dikembangkan pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal ini merupakan penggabungan konsep pewarnaan titik dan pelabelan ketakteraturan jarak. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal dilakukan dengan meminimumkan label titik dan meminimumkan jumlah

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

warna titik pada graf. Definisi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang digunakan pada penelitian ini dapat dilihat pada definisi berikut ini

Definisi 1. (Kristiana, 2023) *Misalkan* $l: V(G) \to \{1,2,\ldots,k\}$ *merupakan fungsi label dan fungsi bobot* $w: V(G) \to N$ *dimana* $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ *Fungsi* l *disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal, jika:*

i. $opt(l) = min\ \{max\ \{l_i\}; l_i\ pelabelan\ titik\ ketakteraturan\ \}$
ii. *untuk setiap* $uv \in E(G)$, $w(u) \neq w(v)$

Definisi 2. (Kristiana, 2023) *Bilangan kromatik ketakteraturan lokal yang dinotasikan dengan* $\chi_{lis}(G)$ *yaitu kardinalitas minimum pewarnaan titik ketakteraturan lokal*

Lemma 1. (Kristiana, 2023) *Misalkan graf* G *merupakan graf terhubung dan sederhana, maka* $\chi_{lis}(G) \geq \chi(G)$

Azzahra, et.al, telah meneliti bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf ladder, graf helm, dan beberapa graf grid lainnya. Pada penelitiannya tersebut salah satu teorema yang diperoleh yakni bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf ladder L_n yaitu 4 dengan $n \geq 2$.

METODE

Jenis penelitian ini merupakan penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif merupakan penelitian yang menemukan hal-hal baru yang bersifat eksplorasi. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode yang menggunakan beberapa pembuktian yang bersifat deduktif yang berlaku dalam logika matematika. Metode ini menggunakan aksioma, postulat, atau teorema yang sudah ada guna membuktikan permasalahan yang diteliti. Pada prosesnya, penelitian ini menggunakan pendeteksian pola tertentu sehingga permasalahan yang ada dapat dirumuskan dan diperoleh bentuk umumnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini dihasilkan teorema pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf pensil. Graf pensilnya berupa graf pensil dengan raut.

Observasi 1. *Diberikan* Pc_n *adalah graf pensil raut tunggal dan* Pc_n' *adalah graf pensil raut ganda. Untuk setiap bilangan bulat positif* $n \geq 3$ $\chi(Pc_n) = 2$, *dan* $\chi(Pc_n') = 2$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

Teorema 1. *Diberikan Pc_n adalah graf pensil raut tunggal. Untuk setiap bilangan bulat positif` $n \geq 3$, $\chi_{lis}(Pc_n) = 4$.*

Bukti. Graf Pc_n merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan titik $V(Pc_n) = \{z\} \cup \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Pc_n) = \{x_1 z\} \cup \{y_1 z\} \cup \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Graf pensil mempunyai kardinalitas titik yakni $|V(Pc_n)| = 2n + 1$, serta mempunyai kardinalitas sisi yaitu $|E(Pc_n)| = 3n$. Derajat minimum dari graf Pc_n adalah $\delta(Pc_n) = 2$ dan derajat maksimum dari graf Pc_n adalah $\Delta(Pc_n) = 3$.

Jika semua titik dilabeli oleh 1 maka kita mempunyai $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) + l(y_{i+1}) = 1 + 1 + 1 = 3$ dan $w(x_{i+2}) = l(x_{i+1}) + l(x_{i+3}) + l(y_{i+2}) = 1 + 1 + 1 = 3$. Hal ini kontradiksi dengan definisi 1, sejak $x_i x_{i+1} \in E(Pc_n{'})$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Oleh karena itu, $opt(l) = 2$.

Berdasarkan lemma 1, batas bawah untuk bilangan kromatik $\chi_{lis}(Pc_n) \geq \chi(Pc_n) = 2$. Jadi, $\chi(Pc_n) \geq 2$. Sementara itu, batas atas untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal, kami mendefinisikan $l: V(Pc_n) \to \{1,2\}$ dengan 2-pelabelan titik ketakteraturan sebagai berikut:

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ genap, \quad 1 \leq i \leq n \\ 2, & untuk\ i\ gasal, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$l(y_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ gasal, \quad 1 \leq i \leq n \\ 2, & untuk\ i\ genap, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$l(z) = 2$$

Oleh karena itu, $opt(l) = 2$. Pelabelan ini memberikan bobot titik sebagai berikut:

i. Untuk n gasal

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & untuk, \quad i = n \\ 3, & untuk, \quad i\ gasal, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ 4, & untuk, \quad i = 1 \\ 6, & untuk, \quad i\ genap, \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, & untuk, \quad i\ genap, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & untuk, \quad i = n \\ 6, & untuk, \quad i\ gasal, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(z) = 3$$

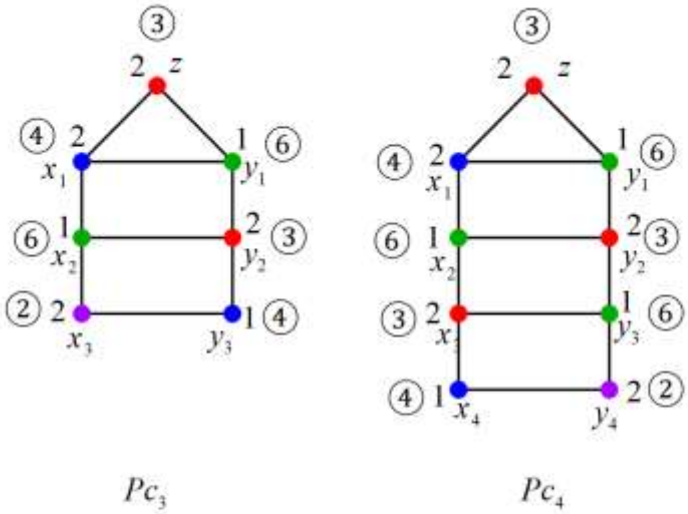
Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

ii. Untuk n genap

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, & untuk \quad i = gasal, \quad 2 \le i \le n-1 \\ 4, & untuk \quad i = 1, \quad i = n \\ 6, & untuk \quad i = genap, \quad 2 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 2, & untuk \quad i = n \\ 3, & untuk \quad i = genap, \quad 1 \le i \le n-1 \\ 6, & untuk \quad i = gasal, \quad 1 \le i \le n-1 \end{cases}$$

$$w(z) = 3$$



Gambar 1. Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Pc_n

Untuk setiap $u, v \in E(Pc_n)$, ambil $u = x_i$, dan $v = x_{i+1}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$, maka $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Ambil $u = y_i$, dan $v = y_{i+1}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$, maka $w(y_i) \neq w(y_{i+1})$. Ambil $u = x_i$, dan $v = y_i$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n$ maka $w(x_i) \neq w(y_i)$. Selain itu, jika $u = z$ dan $v = x_1$ maka $w(z) \neq w(x_1)$, kemudian jika $u = z$ dan $v = y_1$ maka $w(z) \neq w(y_1)$. Berdasarkan hal tersebut, diperoleh himpunan bobot titik graf pensil Pc_n adalah $W(Pc_n) = \{2,3,4,6\}$, jadi $|W(Pc_n)| = 4$. Sehingga $\chi_{lis}(Pc_n) = 4$. ■

Teorema 2. *Diberikan $Pc_n{}'$ adalah graf pensil raut ganda. Untuk setiap bilangan bulat positif $n \ge 3$, $\chi_{lis}(Pc_n{}') = 3$*

Bukti. Graf $Pc_n{}'$ merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan titik $V(Pc_n{}') = \{a\} \cup \{b\} \cup \{x_i, y_i; 1 \le i \le n\}$ dan himpunan sisi $E(Pc_n{}') = \{x_1a\} \cup \{y_1a\} \cup \{x_nb\} \cup \{y_nb\} \cup \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}, x_iy_i; 1 \le i \le n\}$. Graf pensil mempunyai kardinalitas titik yakni $|V(Pc_n{}')| = 2n + 2$, serta mempunyai kardinalitas sisi yaitu $|E(Pc_n{}')| = 3n + 2$. Derajat minimum dari

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

graf $Pc_n{}'$ adalah $\delta(Pc_n{}') = 2$ dan derajat maksimum dari graf $Pc_n{}'$ adalah $\Delta(Pc_n{}') = 3$.

Langkah pertama untuk membuktikan teorema tersebut yaitu mencari batas bawah dari pewarnaan ketakteraturan lokal graf pensil. Jika semua titik dilabeli oleh 1 maka kita mempunyai $w(x_{i+1}) = l(x_i) + l(x_{i+2}) + l(y_{i+1}) = 1 + 1 + 1 = 3$ dan $w(x_{i+2}) = l(x_{i+1}) + l(x_{i+3}) + l(y_{i+2}) = 1 + 1 + 1 = 3$. Hal ini kontradiksi dengan definisi 1, sejak $x_i x_{i+1} \in E(Pc_n{}')$, $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Oleh karena itu, $opt(l) = 2$.

Berdasarkan lemma 1, batas bawah untuk bilangan kromatik $\chi_{lis}(Pc_n{}') \geq \chi(Pc_n{}') = 2$. Jadi, $\chi(Pc_n{}') \geq 2$. Sementara itu, batas atas untuk bilangan kromatik ketakteraturan lokal, kami mendefinisikan $l: V(Pc_n{}') \to \{1,2\}$ dengan 2-pelabelan titik ketakteraturan sebagai berikut :

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ gasal, \quad 1 \leq i \leq n \\ 2, & untuk\ i\ genap, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$l(y_i) = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ genap, \quad 1 \leq i \leq n \\ 2, & untuk\ i\ gasal, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$l(a) = 2$$

$$l(b) = 2$$

Oleh karena itu, $opt(l) = 2$. Pelabelan ini memberikan bobot titik sebagai berikut:

i. Untuk n gasal

$$w(x_i) = \begin{cases} 3, & untuk \quad i = genap, \quad 1 \leq i \leq n \\ 6, & untuk \quad i = gasal, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, & untuk, \quad i = gasal, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ 4, & untuk, \quad i = 1, \quad i = n \\ 6, & untuk, \quad i = genap, \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(a) = 3$$

$$w(b) = 3$$

ii. Untuk n genap

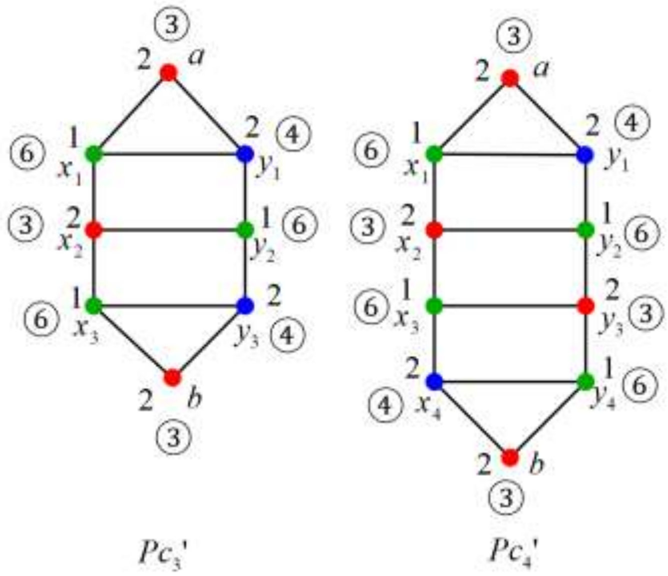
$$w(x_i) = \begin{cases} 3, & untuk \quad i = genap, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & untuk \quad i = n \\ 6, & untuk \quad i = gasal, \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, & untuk \quad i = gasal, \quad 2 \leq i \leq n \\ 4, & untuk \quad i = 1 \\ 6, & untuk \quad i = genap, \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

$w(a) = 3$

$w(b) = 3$



Gambar 2. Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Pc_n'

Untuk setiap $u, v \in E(Pc_n')$, ambil $u = x_i$, dan $v = x_{i+1}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$ maka $w(x_i) \neq w(x_{i+1})$. Ambil $u = y_i$, dan $v = y_{i+1}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n-1$ maka $w(y_i) \neq w(y_{i+1})$. Ambil $u = x_i$, dan $v = y_i$ untuk $i = 1,2,3, \dots, n$ maka $w(x_i) \neq w(y_i)$. Selain itu, jika $u = a$ dan $v = x_1$ maka $w(a) \neq w(x_1)$, kemudian jika $u = a$ dan $v = y_1$ maka $w(a) \neq w(y_1)$. Jika $u = b$ dan $v = x_n$, maka $w(b) \neq w(x_n)$, lalu jika $u = b$ dan $v = y_n$, maka $w(b) \neq w(y_n)$. Berdasarkan hal tersebut, diperoleh himpunan bobot titik graf pensil Pc_n' adalah $W(Pc_n') = \{3,4,6\}$, jadi $|W(Pc_n')| = 3$. Sehingga $\chi_{lis}(Pc_n') = 3$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam paper ini kita telah belajar tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf pensil. Kesimpulan yang diperoleh yakni, nilai eksak bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf pensil raut tunggal adalah $\chi_{lis}(Pc_n) = 4$ untuk $n \geq 3$. Pada graf pensil raut ganda memiliki nilai eksak bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah $\chi_{lis}(Pc_n') = 3$ untuk $n \geq 3$

DAFTAR PUSTAKA

A'yun, Q., Adawiyah, R., Agustin, I. H., & Albirri, E. R. (2021, March). On the irregular coloring of bipartite graph and tree graph families. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1836, No. 1, p. 012024). IOP Publishing.

Adawiyah, R., Prihandini, R. M., Albirri, E. R., Agustin, I. H., & Alfarisi, R.

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 9 No 1 Januari 2024
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
97 - 105

(2019, March). The local multiset dimension of unicyclic graph. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* (Vol. 243, No. 1, p. 012075). IOP Publishing.

Agustin, I. H., Adawiyah, R., & Kurniawati, E. Y. (2021, March). On the study of local antimagic vertex coloring of graphs and their operations. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1836, No. 1, p. 012018). IOP Publishing.

Azahra, Nadia., Kristiana I.A., Dafik., Alfarisi, R. 2020. On The Local Irregularity Vertex Coloring of Related Grid Graph. International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR).

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). The locating-chromatic number of a graph. Bull. Inst. Combin. Appl, 36(89), 101.

Chartrand, G., English, S., & Zhang, P. (2017). Kaleidoscopic colorings of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, *37*(3), 711-727.

F. Daniel and P. Taneo, Teori Graf. Deepublish, 2019.

Fran.Fransiskus.,Kabang.K.N.,Yundari. 2021.''Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Total Dan Graf Splitting Dari Graf Bintang,'' Teorema: Teori dan Riset Matematika

H. S. Ramane, V. V. Manjalapur, and I. Gutman, "General sum-connectivity index, general product-connectivity index, general zagreb index and coindices of line graph of subdivision graphs," AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, vol. 14, no. 1, pp. 92–100, 2020.

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1990. Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction. New York: Academic Press, Inc.

K. Munawaroh, A. I. Kristiana, E. R. Albirri, D. Dafik, and R. Adawiyah, "Pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada keluarga graf unicyclic," Cgant Journal of Mathematics and Applications, vol. 2, no. 2, pp. 6–21, 2022.

Kristiana I. A., Dafik., Utoyo M. I., Slamin., Alfarisi R., Agustin H.I., dan Venkatachalam M. 2019. Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. International Journal of Civil Engineering and Technology(IJCIET). 10(4):451-461

Kristiana, A. I., Anzori, A., Adawiyah, R., Slamin, S., & Albirri, E. R. (2023). Bilangan Kromatik Graceful Pada Keluarga Graf Grid. *Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, *8*(2), 144-155.

Kristiana, A. I., Aji, A., Wihardjo, E., & Setiawan, D. (2022). on Graceful Chromatic Number of Vertex amalgamation of Tree Graph Family. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, *7*(3), 432-444.

Kristiana, A. I., Mursyidah, I. L., Dafik, D., Adawiyah, R., & Alfarisi, R. (2023). Local irregular vertex coloring of comb product by path graph and star graph. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, *15*(06), 2250148.

Kristiana, A. I., Utoyo, M. I., Dafik, D., Alfarisi, R., & Waluyo, E. (2022). On the $ r $-Dynamic Chromatic Number of Corona Product of Star Graph. *Thai Journal of Mathematics*, *20*(3), 1389-1397

Mercy, M. H., & Arputhamary, I. A. (2023). Rainbow Connection Number of Corona Product of Pencil Graphs P m∘ Pc n, K m∘ Pc n and C m∘ Pc

n. In *Mathematical and Computational Intelligence to Socio-scientific Analytics and Applications* (pp. 185-194). Singapore: Springer Nature Singapore.

Nuroeni, I., Kristiana, A. I., Hussen, S., Setiawani, S., & Adawiyah, R. (2023). Local Irregularity Point Coloring On The Result Of Subdivision Operation Of Helm Graphs. *Jurnal Diferensial*, *5*(2), 117-125.

Parvathi, N., & Rani, A. V. (2018, April). Upper bound for the span of pencil graph. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1000, No. 1, p. 012032). IOP Publishing.

Pratama, P. A. C. (2022). Kajian Bilangan Kromatik Graceful Untuk Graf *C_m× P_n* (Doctoral dissertation, Universitas Pendidikan Ganesha).

Simamora, D. N., & Salman, A. N. M. (2015). The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs. *Procedia Computer Science*, *74*, 138-142.

Slamin. 2009. Desain Jaringan Pendidikan Teori Graf. Jember: Universitas Jember

Waluyo, E., Wahab, A. A., & Rudi, M. (2023). Pewarnaan Graceful Pada Graf Hasil Operasi Comb Graf Siklus Dan Graf Star. *Kadikma*, *14*(1), 9-19.

Waluyo, E., Wisudaningsih, E. T., & Masruro, M. (2023). Bilangan Kromatik Graceful Pada Subdivisi Graf Siklus Comb Graf Star. *Kadikma*, *14*(1), 20-29.

X. Liu and P. Lu, “Spectra of subdivision-vertex and subdivision-edge neighbourhood coronae,” Linear Algebra and Its Applications, vol. 438, no. 8, pp. 3547–3559, 2013.