Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Modifikasi Aritmatika Aljabar pada Bilangan *Fuzzy* Hexagonal dan Penentuan Invers Matriks

Modification of Algebraic Arithmetic on Hexagonal Fuzzy Numbers and Determination of Inverse Matrix

Dian Ayu Puspita[1], Mashadi[2]
dian.ayu6862@grad.unri.ac.id

Universitas Riau

Abstrak

Bilangan fuzzy hexagonal merupakan pengembangan dari bilangan fuzzy trapezoidal. Sama seperti aljabar untuk bilangan fuzzy trapezoidal. Tidak banyak perbedaaan aljabar yang diberikan oleh berbagai penulis untuk banyak operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar. Akan tetapi untuk operasi perkalian, pembagian dan invers banyak sekali alternatif aljabar yang ditawarkan oleh berbagai penulis dalam bentuk parametrik maupun dalam bentuk biasa. Tetapi permasalahan yang timbul tidak selalu memiliki invers untuk sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $(\tilde{a})$. Dalam tulisan ini, dengan mengubah bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ menjadi bentuk lain $\tilde{a} = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$ dan didefinisikan dua buah titik tengah $m_1(\tilde{a})$ dan $m_2(\tilde{a})$ untuk sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $(\tilde{a})$. Sedemikian hingga untuk bentuk aljabar perkalian, pembagian dan invers terdapat dengan tunggal $(\tilde{a}(r))^{-1} = 1/(\tilde{a}(r))$ yang dapat menghasilkan $(\tilde{a}(r)) \otimes (\tilde{a}(r))^{-1} = (\tilde{\imath}(r))$ dengan menggunakan metode baris elementer. Pada bagian akhir diberikan contoh mententukan invers matriks bilangan fuzzy hexagonal ordo 2×2.

Kata Kunci: Aritmatika aljabar, bilangan *fuzzy* hexagonal, inverse matrix

Abstract

Hexagonal fuzzy numbers are a development of trapezoidal fuzzy numbers. Just like algebra for trapezoidal fuzzy numbers. There are not many algebraic differences given by various authors for the many operations of addition, subtraction, and scalar multiplication. However, for multiplication, division, and inverse operations, there are many algebraic alternatives offered by various authors in parametric and ordinary forms. But the problems that arise do not always have an inverse for any hexagonal fuzzy number $(\tilde{a})$. *In this paper, by changing hexagonal fuzzy numbers* $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ *into another form* $\tilde{a} = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$ *and defining two midpoints* $m_1(\tilde{a})$ *and* $m_2(\tilde{a})$ *for any hexagonal fuzzy number* $(\tilde{a})$. *Thus, for the algebraic forms of multiplication, division, and inverse there is one* $(\tilde{a}(r))^{-1} = 1/(\tilde{a}(r))$ *that is produced* $(\tilde{a}(r)) \otimes (\tilde{a}(r))^{-1} = (\tilde{\imath}(r))$ *using the elementary row method. At the end, an example of determining the inverse of a hexagonal fuzzy number matrix that has order* 2×2.

Keywords: *Algebra arithmetic, hexagonal fuzzy number, inverse matrix*

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

PENDAHULUAN

Banyak yang telah membahas mengenai bilangan *fuzzy* yaitu bilangan *fuzzy* triangular (Zadeh, Introduction, & Navy, 1965) dan (Of, Polish, Sciences, & Science, 2003), (Mashadi, Safitri, & Sukono, 2023), (Number, 2017), trapezoidal (P, A, & R, 2013),(Mashadi et al., 2024) dan pentagonal (Arfina & adi, 2020), (T.Pathinathan, 2014). Bilangan *fuzzy* hexagonal ini merupakan pengembangan dari bilangan *fuzzy* trapezoidal. Bilangan *fuzzy* hexagonal banyak juga yang sudah membahas dalam (Sellaelakkiya, 2018), (Harun, Mashadi, & Gemawati, 2020), (P et al., 2013), (Sudha & M., 2016), (Arokiamary & Jayapriya, 2018), (Ghadle & Pathade, 2016), (Momena, Mandal, Gazi, Giri, & Mondal, 2023), (Albert, Brauner, Hunt, Jones, & Fowle, 2008), (Dinagar & Narayanan, 2018), (Adilakshmi & Shankar, 2021) dan (Nayagam, Murugan, & Suriyapriya, 2020). Bilangan *fuzzy* hexagonal merupakan bilangan *fuzzy* yang memiliki enam buah titik yang ditulis dalam berbagai bentuk oleh beberapa penulis. Misalnya pada penulis (Dinagar & Narayanan, 2017), (Nalvade, Mhaske, Waghmare, & Todmal, 2023) $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, dimana $(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6)$. Dan bentuk lain $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, dengan a dan b merupakan titik pusat, α_1 dan α_2 merupakan lebar kiri sedangkan β_1 dan β_2 merupakan lebar kanan oleh penulis (Mashadi et al., 2023).

Operasi aljabar bilangan *fuzzy* hexagonal telah banyak dilakukan oleh berbagai penulis (P et al., 2013), (Hamid & Salih, 1978) dan (Ganesan & Veeramani, 2006) seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian skalar yang dibuat tidak banyak perbedaan. Tetapi, pada (P et al., 2013) operasi pengurangan memiliki bentuk yang berbeda yaitu dengan mengurangkan bilangan *fuzzy* hexagonal pertama dengan terakhir. Dan pada operasi perkalian, pembagian dan invers banyak sekali perbedaan yang dilakukan oleh beberapa penulis (Momena et al., 2023) dan (Kane, Diakite, Kane, Bado, & Diawara, 2021). Seperti pada operasi perkalian ada yang hanya mengalikan sekawan oleh (Momena et al., 2023), (Uthra, Thangavelu, & Shunmugapriya, 2018). Ada juga operasi perkalian yang menggunkan titik tengah yang membagi enam oleh (Arokiamary & Jayapriya, 2018). Beberapa penulis lain juga menggunakan bentuk parametrik (Harun et al., 2020), pendekatan bilangan interval dalam bentuk parametrik merupakan perluasan operasi aljabar yang menarik. Tetapi pada nilai akhirnya operasi perkalian dengan invers tidak menghasilkan bahwa $\tilde{a} \times \tilde{a}^{-1} = \tilde{\imath}$.

Pada pembahasan ini penulis mengubah sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ ke dalam bentuk bilangan *fuzzy* parametrik, kemudian didefinisikan dua buah nilai tengah bilangan *fuzzy* hexagonal atau $m_1(\tilde{a})$ dan $m_2(\tilde{a})$. Nilai tengah digunakan untuk mengkontruksi aritmetika

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

perkalian, pembagian dan invers bilangan *fuzzy* hexagonal. Dengan menggunakan aritmetika yang sudah dikontruksi dapat menentukan invers matriks *fuzzy* hexagonal menggunakan operasi baris elementer. Sedemikian sehingga dengan menggunakan modifikasi tersebut akan menghasilkan invers yang tunggal dan $\tilde{a} \times \tilde{a}^{-1} = \tilde{\imath}$. Matriks yang digunakan tidak hanya matriks bujur sangkar, tetapi matriks yang tidak bujur sangkar dan matriks singular juga digunakan sehingga memiliki invers yang tunggal dan $\tilde{A} \times \tilde{A}^{-1} = \tilde{\imath}$.

METODE

Beberapa definisi dasar dan teori yang berkaitan dengan bilangan *fuzzy* hexagonal telah dibahas oleh (Kholida & Mashadi, 2019),(Harun et al., 2020).

Definisi 1 Bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dengan himpunan $\tilde{a}: R \rightarrow [0,1]$ yang memenuhi syarat berikut:

(i) $\tilde{a}$ adalah semikontinu atas.

(ii) $\tilde{a}(x) = 0$ diluar interval $[a - \alpha_1 - \alpha_2, b + \beta_1 + \beta_2]$.

(iii) Terdapat bilangan a, b yang terletak di dalam $[a - \alpha_1 - \alpha_2, b + \beta_1 + \beta_2]$ sehingga

(a) $\tilde{a}(x)$ monoton naik pada interval $[a - \alpha_1 - \alpha_2, a]$.

(b) $\tilde{a}(x)$ monoton turun pada interval $[b, b + \beta_1 + \beta_2]$.

(c) $\tilde{a}(x) = 1$, untuk nilai $a \le x \le b$.

Definisi 2 Suatu bilangan *fuzzy* hexagonal$\tilde{a} = (a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ disebut bilangan *fuzzy* hexagonal nol jika dan hanya jika $\tilde{a} = (0,0,0,0,0,0)$.

Definisi 3 Suatu bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ disebut bilangan *fuzzy* hexagonal identitas jika dan hanya jika $\tilde{a} = (1,1,1,1,1,1)$.

Bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ telah dibahas oleh (P et al., 2013), (Arokiamary & Jayapriya, 2018) dan (Sudha & M., 2016) dengan fungsi keanggotaan diberikan sebagai berikut:

Definisi 4 Diberikan bilangan *fuzzy* hexagonal dengan syarat $(a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6)$ maka terdapat fungsi keanggotaannya sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{a}}(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_1}{a_2 - a_1}\right), & a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_2}{a_3 - a_2}\right), & a_2 \le x \le a_3 \\ 1, & a_3 \le x \le a_4 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_4}{a_5 - a_4}\right), & a_4 \le x \le a_5 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a_6 - x}{a_6 - a_5}\right), & a_5 \le x \le a_6 \\ 0, & x < a_1 \; dan \; x > a_6 \end{cases}$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Penelitian ini merupakan jenis penelitian deduktif aksiomaik yang menggunakan pendekatan kuantitatif. Dimana dalam proses pembuktian di dalamnya menggunakan metode baris elementer dengan algoritma berikut:

1. Sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ diubah ke dalam bentuk parametrik yang dinotasikan dengan $\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$
$$\underline{a}_2(r) = a - (1-2r)\alpha_2 - \alpha_1$$
$$\underline{a}_1(r) = a - (1-r)2\alpha_1$$
$$\overline{a}_1 = a + (1-r)2\beta_1$$
$$\overline{a}_2(r) = a + (1-2r)\beta_2 + \beta_1$$
2. Selanjutnya didefinisikan dua buah titik tengah yaitu $m_1(\tilde{a})$ dan $m_2(\tilde{a})$ untuk sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ atau dalam bentuk parametrik $\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$.
Dimana $m_1(\tilde{a}) = \frac{a+b}{2}$ dan $m_2(\tilde{a}) = \frac{\underline{a}_1(1)+\overline{a}_1(1)}{2}$.
3. Dengan menggunakan dua buah titik tengah maka aljabar yang dikontruksi digunakan untuk menentukan invers *fuzzy* hexagonal, sehingga menghasilkan $\tilde{a}(r) \times \tilde{a}(r)^{-1} = \tilde{\imath}(r)$.
4. Nilai tengah yang dikontruksi juga digunakan untuk menentukan invers matriks *fuzzy* hexagonal, sehingga menghasilkan $\tilde{A}(r) \times \tilde{A}(r)^{-1} = \tilde{I}(r)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dengan menggunakan metode baris elementer dan modifikasi aritmatika operasi aljabar untuk menentukan penyelesaian invers dan menghasilkan invers tunggal, dan hasil kali inversnya adalah identitas.

Definisi 1 Bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a}$ merupakan bilangan *fuzzy* hexagonal jika $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ dengan a dan b merupakan titik pusat, α_1 dan α_2 lebar kiri sedangkan β_1 dan β_2 lebar kanan. Bilangan *fuzzy* hexagonal memiliki fungsi keanggotaan yang diberikan dalam (Harun et al., 2020) dan (Adilakshmi & Shankar, 2021) sebagai berikut:

Definisi 2 Sebuah bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ mempunyai fungsi keanggotaan dalam bentuk

$$\mu\tilde{a}(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - a + \alpha_1}{\alpha_2}\right), a - \alpha_1 - \alpha_2 \le x \le a - \alpha_1 \\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_1}{\alpha_2}\right), a - \alpha_1 \le x \le a \\ 1 \quad , \quad a \le x \le b \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x - b}{\gamma_1}\right), b \le x \le b + \gamma_1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - b - \gamma_1}{\gamma_2}\right), b + \gamma_1 \le x \le b + \gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 \quad , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Bilangan *fuzzy* hexagonal memiliki bentuk parametrik seperti pada Definisi 3.

Definisi 3 Sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ memiliki bentuk parametrik $\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$, $0 \leq r \leq 1$ dapat direpresentasikan sebagai:

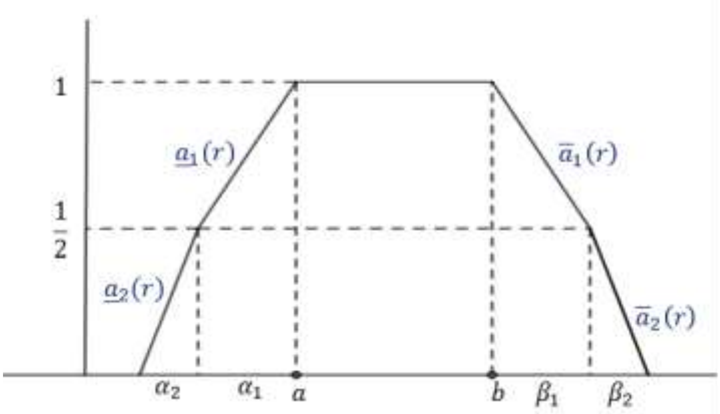
$\underline{a}_2(r) = a - (1-2r)\alpha_2 - \alpha_1$

$\underline{a}_1(r) = a - (1-r)2\alpha_1$

$\overline{a}_1(r) = b + (1-r)2\beta_1$

$\overline{a}_2(r) = b + (1-2r)\beta_2 + \beta_1$

Penjelasan pada Definisi 3 dapat dilihat pada Gambar 1



Gambar 1: Bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$

Diberikan dua bilangan *fuzzy* hexagonal, yaitu $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ dan $\tilde{b} = (c, d, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)$ yang diubah ke dalam bentuk parametrik sebagai berikut:

$\underline{a}_2(r) = a - (1-2r)\alpha_2 - \alpha_1$

$\underline{a}_1(r) = a - (1-r)2\alpha_1$

$\overline{a}_1(r) = b + (1-r)2\beta_1$

$\overline{a}_2(r) = b + (1-2r)\beta_2 + \beta_1$

dan

$\underline{b}_2(r) = c - (1-2r)\gamma_2 - \gamma_1$

$\underline{b}_1(r) = c - (1-r)2\gamma_1$

$\overline{b}_1(r) = d + (1-r)2\delta_1$

$\overline{b}_2(r) = d + (1-2r)\delta_2 + \delta_1$

sehingga bentuk parametrik yang diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)] \quad (1)$$

$$\tilde{b}(r) = [\underline{b}_2(r), \underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r), \overline{b}_2(r)] \quad (2)$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2) berlaku operasi aljabar sebagai berikut:

(i) Penjumlahan

$$\tilde{a}(r) \oplus \tilde{b}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)] \oplus [\underline{b}_2(r), \underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r), \overline{b}_2(r)]$$

$$\tilde{a}(r) \oplus \tilde{b}(r) = [\underline{a}_2(r) + \underline{b}_2(r), \underline{a}_1(r) + \underline{b}_1(r), \overline{a}_1(r) + \overline{b}_1(r), \overline{a}_2(r) + \overline{b}_2(r)]$$

(ii) Pengurangan

$$\tilde{a}(r) \ominus \tilde{b}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)] \ominus [\underline{b}_2(r), \underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r), \overline{b}_2(r)]$$

$$\tilde{a}(r) \ominus \tilde{b}(r) = [\underline{a}_2(r) - \underline{b}_2(r), \underline{a}_1(r) - \underline{b}_1(r), \overline{a}_1(r) - \overline{b}_1(r), \overline{a}_2(r) - \overline{b}_2(r)]$$

(iii) Perkalian skalar

$$k\tilde{a}(r) = \begin{cases} [k\overline{a}_2, k\overline{a}_1, k\underline{a}_1, k\underline{a}_2], \text{jika } k > 0 \\ [k\underline{a}_2, k\underline{a}_1, k\overline{a}_1, k\overline{a}_2], \text{jika } k < 0 \end{cases}$$

(iv) Didefinisikan dua buah titik tengah $m_1(\tilde{a})$, $m_2(\tilde{a})$ dan $m_1(\tilde{b})$, $m_2(\tilde{b})$ yang merupakan nilai tengah dari $\tilde{a}(r)$ dan $\tilde{b}(r)$ dengan $m_1(\tilde{a}) = \frac{a+b}{2}$, $m_2(\tilde{a}) = \frac{\underline{a}_1(1)+\overline{a}_1(1)}{2}$, $m_1(\tilde{b}) = \frac{c+d}{2}$ dan $m_2(\tilde{b}) = \frac{\underline{b}_1(1)+\overline{b}_1(1)}{2}$.

(v) Aritmetika perkalian

$$\tilde{a}(r) \otimes \tilde{b}(r) = (\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)) \otimes (\underline{b}_2(r), \underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r), \overline{b}_2(r))$$

$$= [\underline{a}_2(r)m_2(\tilde{b}) + \underline{b}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{b}), \underline{a}_1(r)m_1(\tilde{b}) + \underline{b}_1(r)m_1(\tilde{a}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{b}), \overline{a}_1(r)m_1(\tilde{b}) + \overline{b}_1(r)m_1(\tilde{a}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{b}), \overline{a}_2(r)m_2(\tilde{b}) + \overline{b}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{b})]$$

Berdasarkan v) dapat dikontruksi invers untuk sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal yaitu sebagai berikut:

Teorema 4 Misalkan $\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$
maka terdapat $\tilde{x}(r) = [\underline{x}_2(r), \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \overline{x}_2(r)]$
dengan $\tilde{x}(r) = \frac{1}{\tilde{a}(r)} = \left[\frac{2m_2(\tilde{a})-\underline{a}_2(r)}{(m_2(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_1(\tilde{a})-\underline{a}_1(r)}{(m_1(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_1(\tilde{a})-\overline{a}_1(r)}{(m_1(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_2(\tilde{a})-\overline{a}_2(r)}{(m_2(\tilde{a}))^2}\right]$
sehingga $\tilde{a}(r) \otimes \frac{1}{\tilde{a}(r)} = \tilde{\imath}(r)$.

Bukti :
Misalkan $\tilde{x}(r) = [\underline{x}_2(r), \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \overline{x}_2(r)]$
sehingga $(\tilde{a}(r))^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}(r)} = \tilde{x}(r)$, dan $\tilde{\imath}(r) = [1,1,1,1]$ yang ekuivalen dengan bentuk $\tilde{\imath} = (1,1,0,0,0,0)$, sehingga $m_1(\tilde{x}) = \frac{1}{m_1(\tilde{a})} = \frac{1}{a}$ dan $m_2(\tilde{x}) = \frac{1}{m_2(\tilde{a})} = \frac{1}{a}$.
Maka berlaku:

$$\tilde{a}(r) \otimes \tilde{x}(r) = \tilde{\imath}(r)$$

$$= [\underline{a}_2(r)m_2(\tilde{x}) + \underline{x}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{x}), \underline{a}_1(r)m_1(\tilde{x}) + \underline{x}_1(r)m_1(\tilde{a}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{x}), \overline{a}_1(r)m_1(\tilde{x}) + \overline{x}_1(r)m_1(\tilde{x}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{x}), \overline{a}_2(r)m_2(\tilde{x}) + \overline{x}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{x})]$$

$$= \left[a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot a - a \cdot \frac{1}{a}, a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot a - a \cdot \frac{1}{a}, a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot a - a \cdot \frac{1}{a}, a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot a - a \cdot \frac{1}{a}\right]$$
$$= [1,1,1,1]$$

Maka diperoleh:

$$[\underline{a}_2(r)m_2(\tilde{x}) + \underline{x}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{x}), \underline{a}_1(r)m_1(\tilde{x}) + \underline{x}_1(r)m_1(\tilde{a}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{x}), \overline{a}_1(r)m_1(\tilde{x}) + \overline{x}_1(r)m_1(\tilde{x}) - m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{x}), \overline{a}_2(r)m_2(\tilde{x}) + \overline{x}_2(r)m_2(\tilde{a}) - m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{x})] = [1,1,1,1]$$

Sehingga untuk sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal
$\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$ diperoleh

$$(\tilde{a}(r))^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}(r)} = \tilde{x}(r) = [\underline{x}_2(r), \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \overline{x}_2(r)]$$

$$\frac{1}{\tilde{a}(r)} = \left[\frac{2m_2(\tilde{a})-\underline{a}_2(r)}{(m_2(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_1(\tilde{a})-\underline{a}_1(r)}{(m_1(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_1(\tilde{a})-\overline{a}_1(r)}{(m_1(\tilde{a}))^2}, \frac{2m_2(\tilde{a})-\overline{a}_2(r)}{(m_2(\tilde{a}))^2}\right]$$

Corollary 6 Sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal dalam bentuk parametrik $\tilde{a}(r) = [\underline{a}_2(r), \underline{a}_1(r), \overline{a}_1(r), \overline{a}_2(r)]$ dan $\tilde{b}(r) = [\underline{b}_2(r), \underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r), \overline{b}_2(r)]$ dimana $m_1(\tilde{a}) \neq 0$ dan $m_1(\tilde{a}) \neq 0$ maka:

$$\frac{\tilde{a}(r)}{\tilde{b}(r)} = \left[\frac{\underline{a}_2(r)m_2(\tilde{b}) - \underline{b}_2(r)m_2(\tilde{a}) + m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{b})}{(m_2(\tilde{b}))^2}, \frac{\overline{a}_1(r)m_1(\tilde{b}) - \overline{b}_1(r)m_1(\tilde{a}) + m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{b})}{(m_1(\tilde{b}))^2}, \frac{\underline{a}_1(r)m_1(\tilde{b}) - \underline{b}_1(r)m_1(\tilde{a}) + m_1(\tilde{a})m_1(\tilde{b})}{(m_1(\tilde{b}))^2}, \frac{\overline{a}_2(r)m_2(\tilde{b}) - \overline{b}_2(r)m_2(\tilde{a}) + m_2(\tilde{a})m_2(\tilde{b})}{(m_2(\tilde{b}))^2}\right]$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Contoh 1 Ambil sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = [-1{,}5{,}2{,}2{,}2{,}2]$.
Misalkan $\tilde{c} = 1/\tilde{a}$

dengan menggunakan aritmatika perkalian, pembagian dan invers di atas maka diperoleh:

$$\tilde{a}(r) = [4r - 5, 4r - 5, 9 - 4r, 9 - 4r],$$

$$m_1(\tilde{a}) = \frac{(4r-5)+(9-4r)}{2} = 2,\ m_2(\tilde{a}) = \frac{(4r-5)+(9-4r)}{2} = 2$$

$$\tilde{c}(r) = \left[\frac{9-4r}{4}, \frac{9-4r}{4}, \frac{4r-5}{4}, \frac{4r-5}{4}\right],$$

$$m_1(\tilde{a}) = \frac{\frac{9-4r}{4}+\frac{4r-5}{4}}{2} = \frac{1}{2},\ m_2(\tilde{a}) = \frac{\frac{9-4r}{4}+\frac{4r-5}{4}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{a}(r)\otimes\tilde{c}(r) = \left[(4r-5)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9-4r}{4}\right)(2) - (2)\left(\frac{1}{2}\right), (4r-5)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9-4r}{4}\right)(2) - (2)\left(\frac{1}{2}\right), (9-4r)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4r-5}{4}\right)(2) - (2)\left(\frac{1}{2}\right), (9-4r)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4r-5}{4}\right)(2) - (2)\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\tilde{a}(r)\otimes\tilde{c}(r) = [1{,}1{,}1{,}1]$$

Contoh 2 Penyelesaian invers matriks *fuzzy* hexagonal
Sebuah matriks bujur sangkar dapat ditentukan inversnya menggunkanan metode baris elementer.
Diberikan sebuah matriks *fuzzy* hexagonal $\tilde{A}_{2\times 2}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-1{,}3{,}2{,}2{,}2{,}2] & [1{,}3{,}1{,}1{,}1{,}1] \\ [3{,}5{,}1{,}1{,}1{,}1] & [-1{,}5{,}2{,}2{,}2{,}2] \end{bmatrix}$$

Matriks diatas dapat ditulis ke dalam bentuk parametrik, yaitu:

$$\tilde{A}(r) = \begin{bmatrix} [4r-5, 4r-5, 7-4r, 7-4r] & [2r-1, 2r-1, 5-2r, 5-2r] \\ [1+2r, 1+2r, 7-2r, 7-2r] & [4r-5, 4r-5, 9-4r, 9-4r] \end{bmatrix}$$

Matriks diatas diubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar berikut:

$$\tilde{A}(r)]\tilde{I}(r) = \left[\begin{matrix} [4r-5, 4r-5, 7-4r, 7-4r] & [2r-1, 2r-1, 5-2r, 5-2r] \\ [1+2r, 1+2r, 7-2r, 7-2r] & [4r-5, 4r-5, 9-4r, 9-4r] \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} [1{,}1{,}1{,}1] & [0{,}0{,}0{,}0] \\ [0{,}0{,}0{,}0] & [1{,}1{,}1{,}1] \end{matrix}\right]$$

Dengan menggunakan metode baris elementer maka diperoleh inversnya :

$$\left[\begin{matrix} [1{,}1{,}1{,}1] & [0{,}0{,}0{,}0] \\ [0{,}0{,}0{,}0] & [1{,}1{,}1{,}1] \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} \left[\frac{8-6r}{9}, \frac{8-6r}{9}, \frac{6r-14}{9}, \frac{6r-14}{9}\right] & \left[\frac{3r-2}{9}, \frac{3r-2}{9}, \frac{8-3r}{9}, \frac{8-3r}{9}\right] \\ \left[\frac{6r+1}{18}, \frac{6r+1}{18}, \frac{23-6r}{18}, \frac{23-6r}{18}\right] & \left[\frac{31-24r}{36}, \frac{31-24r}{36}, \frac{24r-43}{36}, \frac{24r-43}{36}\right] \end{matrix}\right]$$

Setelah melakukan OBE terhadap matriks $\tilde{A}(r)$ diperoleh nilai matriks $\tilde{A}^{-1}(r)$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{8-6r}{9}, \frac{8-6r}{9}, \frac{6r-14}{9}, \frac{6r-14}{9}\right] & \left[\frac{3r-2}{9}, \frac{3r-2}{9}, \frac{8-3r}{9}, \frac{8-3r}{9}\right] \\ \left[\frac{6r+1}{18}, \frac{6r+1}{18}, \frac{23-6r}{18}, \frac{23-6r}{18}\right] & \left[\frac{31-24r}{36}, \frac{31-24r}{36}, \frac{24r-43}{36}, \frac{24r-43}{36}\right] \end{bmatrix}$$

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Selanjutnya nilai dari $\tilde{A}^{-1}(r)$ dapat dibuktikan dengan cara memperoleh nilai $\tilde{A}^{-1}(r) \otimes \tilde{A}(r) = \tilde{I}(r)$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{8-6r}{9}, \frac{8-6r}{9}, \frac{6r-14}{9}, \frac{6r-14}{9}\right] & \left[\frac{3r-2}{9}, \frac{3r-2}{9}, \frac{8-3r}{9}, \frac{8-3r}{9}\right] \\ \left[\frac{6r+1}{18}, \frac{6r+1}{18}, \frac{23-6r}{18}, \frac{23-6r}{18}\right] & \left[\frac{31-24r}{36}, \frac{31-24r}{36}, \frac{24r-43}{36}, \frac{24r-43}{36}\right] \end{bmatrix} \otimes$$

$$\begin{bmatrix} [4r-5, 4r-5, 7-4r, 7-4r] & [2r-1, 2r-1, 5-2r, 5-2r] \\ [1+2r, 1+2r, 7-2r, 7-2r] & [4r-5, 4r-5, 9-4r, 9-4r] \end{bmatrix}$$

Sehingga dari hasil perhitungan $\tilde{A}^{-1}(r) \otimes \tilde{A}(r)$ di atas diperoleh

$$\tilde{A}^{-1}(r) \otimes \tilde{A}(r) = \begin{bmatrix} [1,1,1,1] & [0,0,0,0] \\ [0,0,0,0] & [1,1,1,1] \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan (Harun et al., 2020) dengan menggunakan aritmatika perkalian, pembagian dan invers tidak menghasilkan identitas, namun hasil akhir yang diperoleh dari $\tilde{A}(r) \otimes \tilde{A}^{-1}(r)$ adalah $\tilde{I}(r)$ (identitas). Sehingga terbukti bahwa dengan menggunakan modifikasi aritmatika yang telah ditemukan tersebut maka akan menghasilkan invers yang tunggal dan akan menghasilkan bahwa matriks dari $\tilde{A}(r)$ dikalikan dengan inversnya akan menghasilkan identitas. Pada penelitian (Harun et al., 2020) dengan menggunakan aritmatikanya tidak menghasilkan inves yang tunggal dantidak menghasilkan $\tilde{A}(r) \otimes \tilde{A}^{-1}(r) = \tilde{I}(r)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Sebarang bilangan *fuzzy* hexagonal $\tilde{a} = (a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ dan $\tilde{b} = (c, d, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2)$, diubah ke dalam bentuk parametrik dan dengan menggunakan dua buah titik tengah. Akan dikontruksi modifikasi aritmatika aljabar. Sehingga untuk aritmatika aljabar penjumlahan pengurangan dan perkalian skalar tidak banyak perbedaan dari beberapa penulis. Namun untuk operasi aljabar perkalian, pembagian dan invers itulah modifikasi aritmetika alternatif solusi yang peneliti tawarkan. Sehingga dengan modifikasi aritmatika perkalian, pembagian, invers yang ditemukan akan menghasilkan nilai invers yang tunggal dan bilangan *fuzzy* akan menghasilkan invers yang jika dikalikan dengan inversnya akan menghasilkan identitas yaitu $\tilde{a}(r) \otimes \tilde{a}(r)^{-1} = \tilde{\imath}(r)$ serta dalam bentuk matriks $\tilde{A}(r) \otimes \tilde{A}(r)^{-1} = \tilde{I}(r)$.

DAFTAR PUSTAKA

Adilakshmi, S., & Shankar, N. R. (2021). A new ranking in hexagonal fuzzy number by centroid of centroids and application in fuzzy critical path. *Reliability: Theory and Applications*, *16*(2), 124–135. https://doi.org/10.24412/1932-2321-2021-262-124-135

Albert, S., Brauner, E. J., Hunt, J., Jones, G., & Fowle, W. (2008). Optimum

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Cost Of Transporting Problems With Hexagonal Fuzzy Numbers. *Technology*, (January), 99–118.

Arfina, I., & adi, M. (2020). Alternative Arithmetic of Pentagonal Fuzzy Numbers. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, *66*(12), 28–36. https://doi.org/10.14445/22315373/ijmtt-v66i12p505

Arokiamary, A., & Jayapriya, R. (2018). *On Inverse of Hextagonal Fuzzy Number Matrices*. *5*(8), 652–660.

Dinagar, D. S., & Narayanan, U. H. (2017). *A study on rank of hexagonal fuzzu number matrices*. *2017*(6), 82–100.

Dinagar, D. S., & Narayanan, U. H. (2018). A Note on L-R Hexagonal Fuzzy Matrices with Matrix Norm. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, *2018*(1), 22–36. https://doi.org/10.5899/2018/jfsva-00427

Ganesan, K., & Veeramani, P. (2006). Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. *Annals of Operations Research*, *143*(1), 305–315. https://doi.org/10.1007/s10479-006-7390-1

Ghadle, K. P., & Pathade, P. A. (2016). Optimal Solution of Balanced and Unbalanced Fuzzy Transportation Problem Using Hexagonal Fuzzy Numbers. *International Journal of Mathematical Research*, *5*(2), 131–137. https://doi.org/10.18488/journal.24/2016.5.2/24.2.131.137

Hamid, H. A., & Salih, M. M. (1978). *Based On Hexagonal Fuzzy Number A New Extension Of Fuzzy Dceision By Opinion Score Method*. *29*(4), 262–278. https://doi.org/10.24297/j.cims.2023.4.29

Harun, S., Mashadi, M., & Gemawati, S. (2020). Alternative Determines Positivity of Hexagonal Fuzzy Numbers and Their Alternative Arithmetic. *International Journal of Management and Fuzzy Systems*, *6*(1), 1. https://doi.org/10.11648/j.ijmfs.20200601.11

Kane, L., Diakite, M., Kane, S., Bado, H., & Diawara, D. (2021). Fully Fuzzy Transportation Problems with Pentagonal and Hexagonal Fuzzy Numbers. *Journal of Applied Research on Industrial Engineering*, *8*(3), 251–269. https://doi.org/10.22105/jarie.2021.288186.1331

Kholida, H., & Mashadi. (2019). Alternative Fuzzy Algebra for Fuzzy Linear System Using Cramers Rules on Fuzzy Trapezoidal Number. *Ijisrt*, *4*(April), 494–500.

Mashadi, Safitri, Y., & Sukono. (2023). Multiplication and inverse operations in parametric form of triangular fuzzy number. *Mathematics and Statistics*, *11*(1), 28–33. https://doi.org/10.13189/ms.2023.110104

Mashadi, Safitri, Y., Sukono, Prihanto, I. G., Johansyah, M. D., & Saputra, M. P. A. (2024). The Inverse and General Inverse of Trapezoidal Fuzzy Numbers with Modified Elementary Row Operations. *Mathematics*, *12*(7), 1–15. https://doi.org/10.3390/math12070946

Momena, A. F., Mandal, S., Gazi, K. H., Giri, B. C., & Mondal, S. P. (2023). Prediagnosis of Disease Based on Symptoms by Generalized Dual Hesitant Hexagonal Fuzzy Multi-Criteria Decision-Making Techniques. *Systems*, *11*(5). https://doi.org/10.3390/systems11050231

Nalvade, A., Mhaske, A., Waghmare, S., & Todmal, S. S. (2023). *Solving Fuzzy Game Theory Problem using Pentagonal Fuzzy Numbers and Hexagonal Fuzzy Number*. *69*(2), 74–79.

Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran
Volume 10 No 1 Januari 2025
E ISSN 2615-0697 dan P ISSN 2622-8149
83 – 93

Nayagam, V. L. G., Murugan, J., & Suriyapriya, K. (2020). Hexagonal fuzzy number inadvertences and its applications to MCDM and HFFLS based on complete ranking by score functions. In *Computational and Applied Mathematics* (Vol. 39). https://doi.org/10.1007/s40314-020-01292-7

Number, T. (2017). *Definition 2.1. Fuzzy Subset Let E be a set with finite or infinite. Let A be a set contained in E. Then the set of ordered pairs (x, µ*. (M), 1–4.

Of, B., Polish, T. H. E., Sciences, A. O. F., & Science, C. (2003). *Ordered Fuzzy Numbers*. *51*(3).

P, R., A, S. S., & R, K. (2013). A New Operation on Hexagonal Fuzzy Number. *International Journal of Fuzzy Logic Systems*, *3*(3), 15–26. https://doi.org/10.5121/ijfls.2013.3302

Sellaelakkiya, L. V. E. (2018). Orthogonal Fuzzy Matrix using Hexagonal Fuzzy. *International Journal for AResearch in Applied Science and Engineering Technology*, *6*(III), 2349–2352. https://doi.org/http://doi.org/10.22214/ijraset.2018.3541

Sudha, A. S., & M., R. (2016). A New Ranking on Hexagonal Fuzzy Numbers. *International Journal of Fuzzy Logic Systems*, *6*(4), 1–8. https://doi.org/10.5121/ijfls.2016.6401

T.Pathinathan, K. P. (2014). *Pentagonal Fuzzy Numbers*. (May), 1003–1005.

Uthra, G., Thangavelu, K., & Shunmugapriya, S. (2018). *Ranking Generalized Intuitionistic Fuzzy Numbers*. *56*(7), 530–538.

Zadeh, L. A., Introduction, I., & Navy, U. S. (1965). *Fuzzy Sets * -. 353*, 338–353.